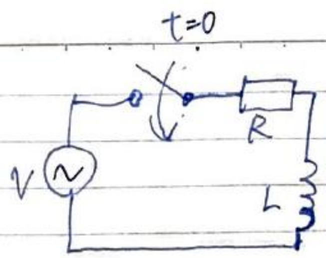
ラプラス変換を使った交流RL直列過渡



$v = E\sin\omega t$

① 閉路方程式

$$E\sin\omega t = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt}$$

$\sin\alpha t = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$

$\frac{df(t)}{dt} = sF(s) - f(0)$

② ラプラス変換

$$E\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = I(s)R + L\{sI(s) - \underbrace{i(0)}_{=0}\}$$

$$I(s) = \frac{\omega E}{(s^2+\omega^2)(sL+R)}$$

未定係数法を用いる.

部分分数分解

$$I(s) = \frac{as+b}{s^2+\omega^2} + \frac{c}{sL+R}$$

$$= \frac{s^2aL + saR + sbL + bR + s^2c + c\omega^2}{(s^2+\omega^2)(sL+R)}$$

$$\begin{cases} aL + c = 0 \\ aR + bL = 0 \\ bR + c\omega^2 = E\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -E\omega L/(R^2+\omega^2L^2) \\ b = E\omega R/(R^2+\omega^2L^2) \\ c = E\omega L^2/(R^2+\omega^2L^2) \end{cases}$$

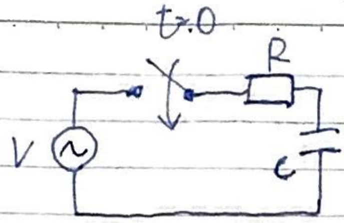
$$I(s) = \frac{as}{s^2+\omega^2} + \frac{b}{s^2+\omega^2} + \frac{c}{sL+R} \rightarrow \frac{c}{L}\cdot\frac{1}{s+\frac{R}{L}}$$

$$\Rightarrow i(t) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t + \frac{c}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{E}{R^2+\omega^2L^2}\left(-\omega L\cos\omega t + R\sin\omega t + \omega L e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

//

ラプラス変換を使った交流直列RC過渡



$V = E\cos\omega t$

閉路方程式は

$$E\cos\omega t = i(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + \underbrace{V_c(0)}_{=0}$$

$$\cos\alpha t = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

ラプラス変換して

$$\int_0^t f(t)dt = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{(-1)}(0)$$

$$\frac{sE}{s^2+\omega^2} = I(s)R + \frac{I(s)}{sC}$$

$$I(s) = \frac{E}{R}\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)(s+\frac{1}{RC})}$$

未定係数法　コンデンサがCなのでX, Y, Zを用いる。

$$I(s) = \frac{E}{R}\left(\frac{sX+Y}{s^2+\omega^2} + \frac{Z}{(s+\frac{1}{RC})}\right)$$

部分分数分解

$$= \frac{E}{R}\left(\frac{s^2X + s\frac{X}{RC} + sY + \frac{Y}{RC} + s^2Z + Z\omega^2}{(s^2+\omega^2)(s+\frac{1}{RC})}\right)$$

$$\begin{cases} X + Z = 1 \\ \frac{X}{RC} + Y = 0 \\ \frac{Y}{RC} + Z\omega^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = R^2C^2\omega^2/(1+R^2C^2\omega^2) \\ Y = -RC\omega^2/(1+R^2C^2\omega^2) \\ Z = 1/(1+R^2C^2\omega^2) \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{E}{R}\left(X\frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{Y}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} + Z\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

変換 $s \to t$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}\left(X\cos\omega t + \frac{Y}{\omega}\sin\omega t + Ze^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$= \frac{E}{R(1+R^2C^2\omega^2)}\left(R^2C^2\omega^2\cos\omega t - RC\omega\sin\omega t + e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$+\alpha$

$A\cos(\omega t+\theta)$

$A(\cos\omega t\cos\theta-\sin\omega t\sin\theta)$

電流，電圧
位相差

$\tan\theta=\frac{1}{RC\omega}$

$\boxed{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}=|Z|}$
インピーダンス

$t\to+\infty$

$$i(t\to+\infty)=\frac{E}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cos(\omega t+\theta)$$

tが無限大ならば
通常の回路と同じかたちに.

最後の $\sim+e^{-\frac{t}{RC}})$ の項が過渡分を表す.

$$i(t)=\frac{E}{R}\frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cdot\left(\frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cos\omega t-\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\sin\omega t+\frac{1}{\omega RC\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

$\cos\theta=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$ とみなして

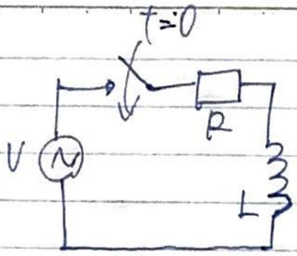
$$i(t)=\frac{E}{R}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\omega^2R^2C^2}}}\cdot\cos(\omega t+\theta)+\frac{1}{1+\omega^2R^2C^2}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}\right\}$$ ただし $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{\omega RC}$

$\tan\theta=\frac{1}{\omega RC}=\frac{1}{2}$ より $\theta=26.57^\circ$

$\alpha+j\omega=\sqrt{\alpha^2+\omega^2}\,e^{j\phi}$

$\phi=\tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha}=\tan^{-1}\frac{\omega}{\frac{1}{CR}}=\tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}$

ラプラス(逆)変換を用いずに交流RL直列過渡



$V = E\sin\omega t$

①線形微分方程式

$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ の一般解は

$$e^{-\int P dx}\left\{\int \left(Q e^{\int P dx}\right) dx + C\right\}$$

回路方程式

$$E\sin\omega t = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E}{L}\sin\omega t$$

① より

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\int \left(\frac{E}{L}\sin\omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t}\right) dt + C\right\}$$

② $\displaystyle\int (e^{at}\sin\omega t)\,dt = \frac{e^{at}}{a^2+\omega^2}(a\sin\omega t - \omega\cos\omega t) + C$

・導出

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{a}e^{at}\sin\omega t - \frac{\omega}{a}\int e^{at}\cos\omega t\,dt$$

$$\int e^{at}\cos\omega t\,dt = \frac{1}{a}e^{at}\cos\omega t + \frac{\omega}{a}\int e^{at}\sin\omega t\,dt$$

$$A \equiv \int e^{at}\sin\omega t\,dt$$

$$A = \frac{1}{a}e^{at}\sin\omega t - \frac{\omega}{a}\left(\frac{1}{a}e^{at}\cos\omega t + \frac{\omega}{a}A\right)$$

$$\underbrace{\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)}_{\frac{a^2+\omega^2}{a^2}} A = e^{at}\left(\frac{1}{a}\sin\omega t - \frac{\omega}{a^2}\cos\omega t\right)$$

$$A = \frac{e^{at}}{a^2+\omega^2}(a\sin\omega t - \omega\cos\omega t)$$

注:ただし右辺に全て「+C」

② より

$$\int \frac{E}{L}\sin(\omega t)\cdot e^{\frac{R}{L}t}\,dt$$

$$= \frac{E}{L}\cdot\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right)$$

$$\therefore i(t) = \frac{E}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t) + e^{-\frac{R}{L}t}C$$

$i(0) = 0$ より $\dfrac{E}{R^2+\omega^2L^2}\cdot(-\omega L) + C = 0$

$$\therefore\ i(t) = \frac{E}{R^2+\omega^2L^2}\left(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t + \omega L e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$