3－1　　　　　　　　　　　　　　　　細かなミスが生じることもある.

教科書がとても分かりやすいため, P37-38の分布関数からとする。(下にちょっっっとだけ)

◎ 分布関数.

(累積) 分布関数とは, 確率変数Xがある値x以下$(X \leqq x)$の値となる確率を表す関数である。　$F(x)$で表される.

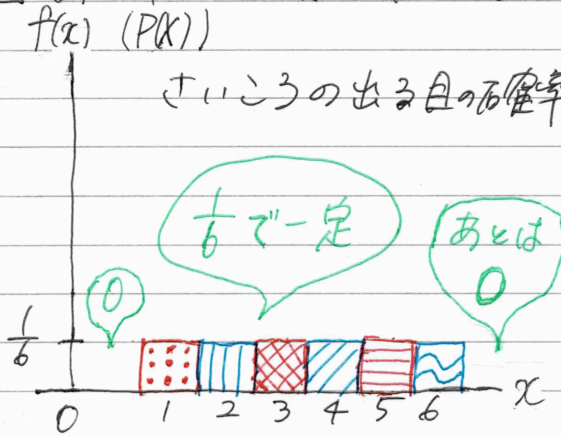
$$\boxed{F(x)=P(X \leqq x)}$$

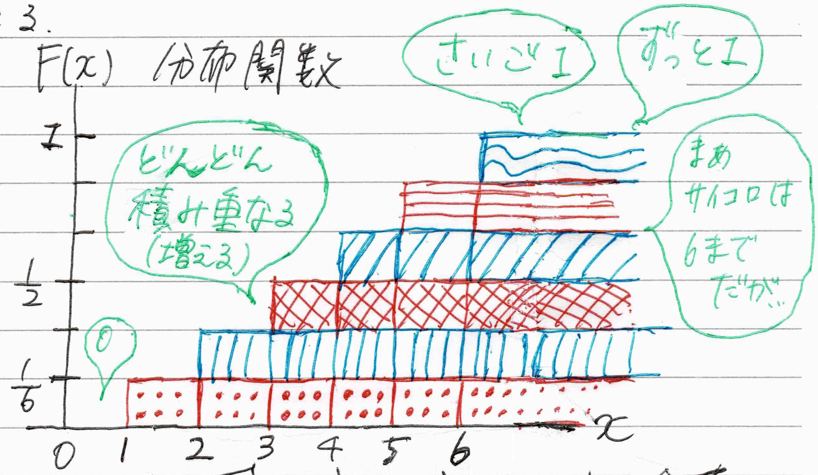
例えば, さいころを投げたときに,「出る目が4以下となる確率」や,「4から6となる確率」など, ある範囲の確率を求める場合に便利.

つまり, サイコロを考えれば,

$F(1)=\frac{1}{6}$, $F(2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$　$F(6)=\frac{1}{6}\times 6=1$　となる.

離散 図のイメージは以下のようになる.





↑ P37 図3-Iと比較して確認!!

P38 分布関数の性質(離散的)

(i) $F(x)=\sum_{x_i \leqq x} f(x_i)$ 上図でわかるとおり, 分布関数では確率が足されていく.

(ii) $F(x)$はxについて減少することのない階段状の関数 足される一方だから, 増加のみ. であり, $F(\infty)=1$, $F(-\infty)=0$ 確率を全て足すと1だからあたりまえ。

(iii) $P(\alpha < X \leqq \beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\sum_{\alpha < x_i \leqq \beta} f(x_i)$ サイコロで例をかくと,

$P(3<X \leqq 6)=F(6)-F(3)=f(4)+f(5)+f(6)$ (4から6の目が出る確率)

離散的(隣り合う数字の間に値が存在しないとき)

X	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
$P(X)$	P_1	P_2	…	P_{n-1}	P_n

↑大文字　↑小文字

サイコロだと…

出目(X)	1	2	3	4	5	6
確率(P(X))	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

連続 分布関数(連続型)　Xがaとbの間で値をとるとすると、
(累積)分布関数は、確率密度関数におけるa(−∞)からxまでの
面積と考えられる(P39図3−2参照、(b)でさいごが1になることにも注目)

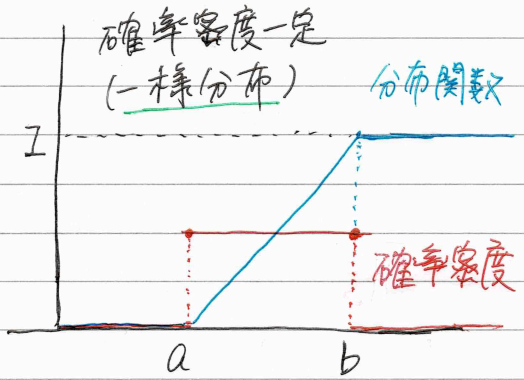
ゆえに、$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$、$F(x)=\int_a^x f(y)dy = \int_{-\infty}^x f(y)dy$　(確率密度関数$f(y)$)

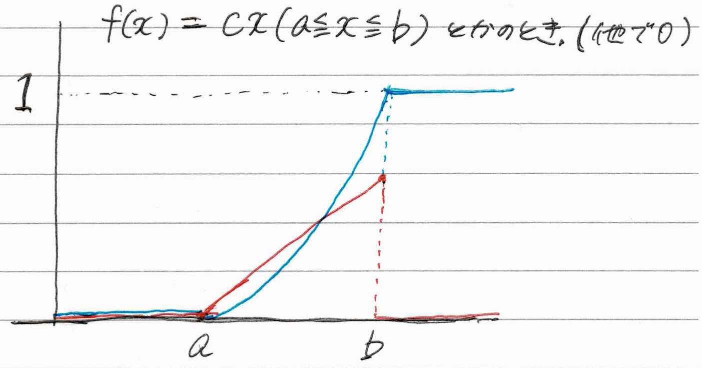
確率密度関数の条件に使われる。($\int_a^b f(x)dx$)

以上のことからまた、もうお分かりのように、$P(\alpha<X\leqq\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

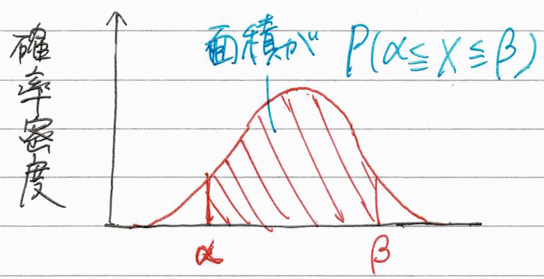
$F(x) \underset{積分}{\overset{微分}{\rightleftarrows}} f(x)$　($F(x)$の勾配が$f(x)$である。)

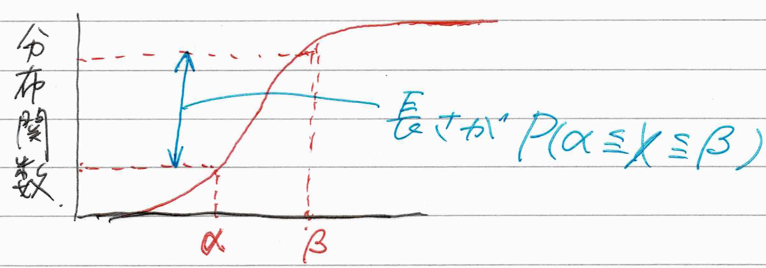
グラフ





連続型変数は、重さや温度などの連続で無数の値をとるものを指す。
また、例えば連続型変数Xがとる値を1から6までの実数とし、どの数値をとる値も等しいとき、X=3となる確率は実は0である。連続型のときは、1.00001など値が無限に存在するため、X=3は無限に存在するうちの1点でしかないからである。　$P(X=3)=1/\infty=0$
そのために、確率分布を表すグラフの縦軸には定義域内でのXの値の相対的な出やすさを示す確率密度が用いられる。





- 連続では離散と違い、区間の端が含まれるかが確率に関係しない(P38)
- $F(\infty)=1$、$F(-\infty)=0$ は離散と同様成立。

問題3-1

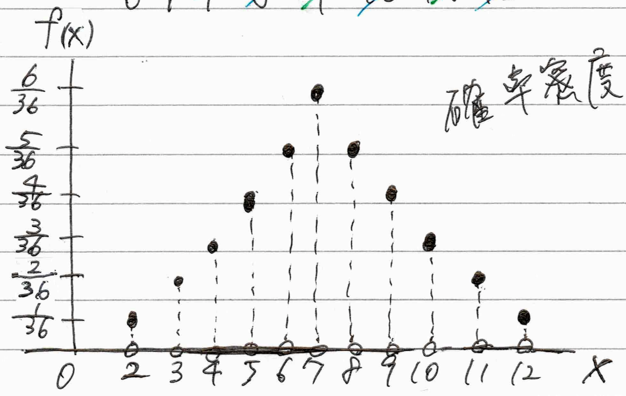
1

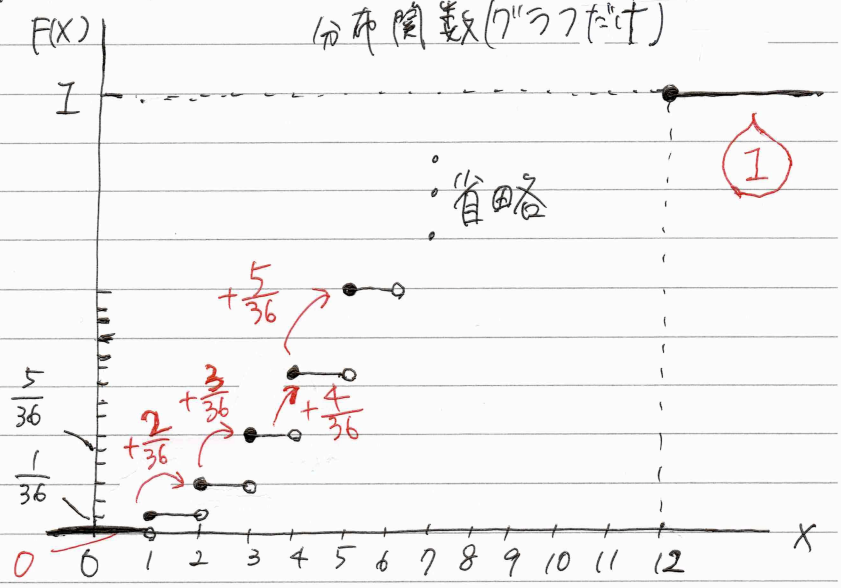
$X = \boxed{X_1 + X_2}$

X_2 \ X_1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

確率密度





2

条件となる $\int_a^b f(x)dx = 1$ を用いて, $\int_0^1 cx\,dx = 1$ より $\frac{1}{2}c = 1 \Leftrightarrow$ $\underline{c = 2}$

$F(x) = 0\ (x<0)$, $x^2\ (0 \leqq x \leqq 1)$, $1\ (1<x)$

aより前は0　$\frac{1}{2}cx^2$にc=2を代入　bの後は1

3-2 期待値と分散・チェビシェフ

分布の様子を表す値の1つ。
ex. 宝くじで何円が期待できるか

期待値とは、確率変数がとる値と、その値をとる確率の積を全て足し合わせたもので、確率変数の平均値を表す。(μ ミュー)

μ 離 $\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$ 連 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

高校の時点で離散的なら知っていた人もいるであろう。かきちは少し違うが。

ex. 離 サイコロで、$\mu = 3.5$ (P42)

連 $f(x) = 1/6$ で X が0から6の範囲をとるとき、

$$E(X) = \int_0^6 x f(x)\,dx = \int_0^6 x \times \frac{1}{6}\,dx = \left[\frac{x^2}{12}\right]_0^6 = 3$$

注) ここで求めているのは確率変数 X の分布の期待値であるが、省略されたりさまざまな言い方がされる。

注) 例2からもわかるように、確率密度は1をこえることもある。
落ちついて考えればわかるが、オマケ的に、期待値のもつ性質を記す。

期待値 $E(X)$ / さいころでの例

1. $E(C) = C$ 　定数の期待値は整数 ex. 全ての目が4のさいころで $\mu = 4$
2. $E(X+C) = E(X) + C$ 　$E(X+3) = E(X) + E(3) = 3.5 + 3 = 6.5$
3. $E(kX) = kE(X)$ 　$E(4 \times X) = 4 \times E(X) = 4 \times 3.5 = 14$
4. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ 　$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3.5 + 3.5 = 7$

分散 ← 定義

$$\sigma^2 = \begin{cases} 離 \ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i) \\ 連 \ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \end{cases}$$

(2乗の平均) − (平均の2乗)
計算方法は $\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2$ も存在

σ : 標準偏差

チェビシェフの不等式 　μ と σ だけ知っている状態でレアなイベントに対して何が言えるか? → チェビシェフの不等式

まず、定理(マルコフ)を示す

マルコフの不等式	定理
X を非負の値をとる確率変数とする このとき、任意の $C > 0$ に対して $P[X \geq C] \leq \dfrac{E[X]}{C}$ が成立	

0以上の実数

(Proof)

確率密度関数

$$E[X] = \int_0^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

$$= \cancel{\int_0^c x f_X(x)\,dx} + \int_c^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

≥ 0 ∵積分区間が正(0からc)

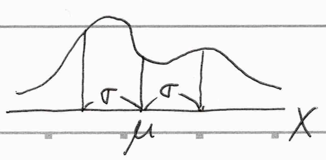
$$\geq \int_c^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

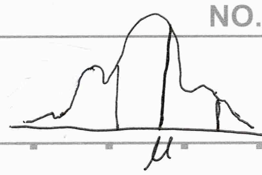
$$\geq c\int_c^{\infty} f_X(x)\,dx = cP[X \geq c]$$

積分区間がcから∞である中で、xをすべてcにすれば「≧」になる

$$\therefore P[X \geq C] \leq \frac{E[X]}{C} \quad \square$$

チェビシェフの不等式





定理 チェビシェフの不等式

$E[X]=\mu,\ V[X]=\sigma^2$ とするとき, 任意の $a>0$ に対して

$$\frac{1}{a^2} \geqq P[|X-\mu| \geqq a\sigma]$$ が成立.

(proof)

マルコフの不等式において, $X=(Y-\mu)^2,\ C=a^2\sigma^2$ とすると,

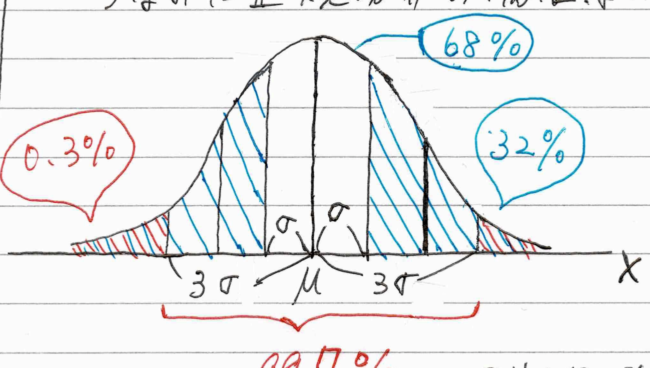
$$P[(Y-\mu)^2 \geqq a^2\sigma^2] \leqq \frac{E[(Y-\mu)^2]}{a^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{a^2\sigma^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\therefore P[|Y-\mu| \geqq a\sigma] \leqq \frac{1}{a^2} \qquad \square$$

ex. $a=3$ のとき,

$$\underbrace{P[|X-\mu| \geqq 3\sigma]}_{3\sigma\text{の外の値をとる}} \leqq \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \quad (\fallingdotseq 11\%)$$

ちなみに正規分布の場合は…



σ外が32%

3σとなると, 0.3%なので,
大変レアである。
0.3% ≦ 11% でチェビを満たす

・チェビシェフはどんな確率分布にも成立するという利点がある.

・離散変数の場合には, 積分を総和記号におきかえて, 同じような評価をすればよい.

※ チェビシェフの他の使われ方(おまけ)

先ほどの証明で, $C=a^2$ とすると

$P[|X-\mu| \geqq a] \leqq \sigma^2/a^2$ となる

ここで, 確率変数として

$$\bar{X} = \underbrace{\frac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{n}}_{\text{標本平均}}$$ を選ぶと

$$E[\bar{X}]=\mu,\quad V[\bar{X}]=\frac{\sigma^2}{n}$$

すると, チェビシェフの不等式は

$$P[|\bar{X}-\mu| \geqq a] \leqq \frac{\sigma^2}{a^2 n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

となり, 例えば以下の2つが説明できる

- 大数の(弱)法則 …① (P72)
- 統計力学の基礎付け…②

① サンプル数を多くすれば真の平均に(母平均)確率的に近づき一致する

② 多数の粒子の集団的な振る舞いを記述する統計力学だが, 粒子は確率的に振る舞ってしまう。aを測定の精度としよう. そのとき, なぜ1個1個の粒子の動きは正確にわからないのにほぼ正確な予言ができるかの答えが得られる. (測定の精度がある程度あり, 集団の数が大きければ測定の精度内での予言が可能となる)

問題3-2

1 3-1でかいたものを見ればわかるとおり、 5 6 7 8 9 となっているため、明らかに $\underline{7}$ $\mu = 7$

$$\sigma^2 = \frac{(25+16\times2+9\times3+4\times4+1\times5)\times2}{36} \fallingdotseq 5.83$$

2

$$\mu = 2\int_0^1 x(1-x)\,dx = 2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\sigma^2 = 2\int_0^1 \left(x-\frac{1}{3}\right)^2(1-x)\,dx = \frac{1}{36}$$

例3でガンマ関数登場

とまあ、ここまでいろいろかいてきたわけだが、ここからは効率をよくするために問題だけに焦点をあててかいていく。(問題をとくときに必要な知識をメイン)

問3-3

モーメント母関数とは $E[e^{tX}]$ である。モーメント母関数 $M_X(t)$ (をマクローリン展開したもの)をm回微分して $t=0$ を代入すると、$E[X^m]$ となり、期待値や分散を求めるのに役立つ。

$$M_X^{(m)}(0) = \frac{d^m}{dt^m}E[e^{tX}]\Big|_{t=0} = E[X^m e^{tX}]\Big|_{t=0} = E[X^m e^0] = E[X^m]$$

主要な確率分布の多くにはモーメント母関数が存在。

また、マクローリン展開から $E[X^m]$ が求まる。

$$\boxed{E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx}$$

I

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$ 3-2の例2

$$E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} xe^{(t-1)x}\,dx$$

$$= \left[x\frac{1}{t-1}e^{(t-1)x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{1}{t-1}e^{(t-1)x}\,dx$$

$t<1$ とすると、

ここが負になるから0

$$E[e^{tX}] = -\left[\frac{1}{(t-1)^2}e^{(t-1)x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{(1-t^2)}$$

$$\frac{1}{(1-t^2)} = 1+2t+3t^2+4t^3+\cdots+(k+1)t^k+\cdots$$ であるから、(マクローリン展開)

P51 3.37より t^k の係数は $E[X^k]/k!$ と等しいから、

$$\frac{E[X^k]}{k!} = (k+1) \qquad \therefore E[X^k] = (k+1)k!$$

ゆえに $E[X] = (1+1)\cdot1 = 2$ $E[X^2] = (2+1)\cdot2 = 6$ $E[X^3] = (3+1)\cdot3\cdot2 = 24$

$$\boxed{E[X] = (E[e^{tX}]\text{をマクローリン展開したときの}t^k\text{の係数})\times k!}$$

もしくはマクローリン展開したものをm回微分して $t=0$ を代入すると $E[X^m]$ となるから。($M_X^{(m)}(0) = E[X^m]$)

$E[X] = 0+2+0+\cdots = 2$ $E[X^2] = 0+0+3\times2+0+\cdots = 6$ $E[X^3] = 0+0+0+4\times3\times2+0+0+\cdots = 24$

問題3-3. 2　P54
(3.42)から,

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2} & (y>0)\\ 0 & (y\le 0)\end{cases}$$

変数変換の式 $g(y)=f(x)\frac{dx}{dy}$　∴ただし $Y=X^2$ など $X=\pm\sqrt{Y}$ の2つの値が対応するときは注意.
(導出もできた方がよい)と思われる

問3-4　1

離散で, P57 (3.50)より. $f_1(x)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=p_{i1}+p_{i2}+\cdots+p_{in} & (x=x_i)\\ 0 & (その他)\end{cases}$

であるから, 求め方としては, 足し算すればよい.
(それぞれのXにおけるYの値をすべて足し合わせる)

$y \backslash x$	0	1	2	3
3	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
2	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$
1	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$
0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0

$f(0,1)$

$f_1(0)=\frac{3}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{8}$

$f_2(1)=\frac{1}{32}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{5}{16}$
(左右対称を利用しても良い)

$f_1(0)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$　$f_1(1)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$　$f_1(2)=\frac{3}{8}$　$f_1(3)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

$f_2(0)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$　$f_2(1)=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$　$f_2(2)=\frac{14}{32}=\frac{7}{16}$　$f_2(3)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

その他のxに対し $f_1(x)=0$, その他のyに対し $f_2(y)=0$

$\boxed{条件付き確率密度\quad f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}}$ を用いる (P.59)

$f(0|1)=\frac{f(0,1)}{f_2(1)}=\frac{1}{32}\Big/\frac{5}{16}=\frac{1}{10}$　同様にして, $f(1|1)=f(2|1)=\frac{2}{5}$　$f(3|1)=\frac{1}{10}$

他のxに対しては $f(x|1)=0$.　途中式は教参照

2.

$\boxed{2次元確率密度関数の条件\quad F(\infty,\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\, f(x,y)=1}$ を用いる.

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とする. $dx\,dy=r\,dr\,d\theta$.　積分計算は微分積分の重積分の置換積分参照.

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\, c e^{-(x^2+y^2)/2}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}dr\, r c e^{-r^2/2}=2\pi c\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty}=0-(-1)2\pi c=2\pi c$$

$$\left\{e^{-\frac{r^2}{2}}\right\}'=-\frac{2r}{2}e^{-\frac{r^2}{2}}=-re^{-\frac{r^2}{2}}$$

$\therefore c=\frac{1}{2\pi}$　$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (教途中式)

$\boxed{\boxed{連続}\quad f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy}$