線形代数6章 $\mathbb{R}^n$の部分空間　わっしょいみっきー

間違いが生じる場合もある。

- 線形代数の中でも抽象的なものを扱う章であるため、理解しにくいと感じる人も多いと思われる。　数に沿った解き方をする。

- 部分空間が何かなどは説明がここでは省かせてもらう。
  (暇だったらかく(ww)

- 定義6.1、注意6.1 チェック。

例題6.1　$\mathbb{R}^2$の部分空間かどうか。

(1) $S=\{c\boldsymbol{u} \mid c\in\mathbb{R}\},\ \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

集合　cは実数　$\mathbb{R}$の要素(元)　2次元

A. $x\in S,\ y\in S$とする。
このときある実数c, dが存在して
$x=c\boldsymbol{u},\ y=d\boldsymbol{u}$を満たす。
αを任意の実数とするとき、
$x+y=(c+d)\boldsymbol{u}\in S$,
$\alpha x=(\alpha c)\boldsymbol{u}\in S$が成立
ゆえにSは$\mathbb{R}^2$の部分空間である。

(論理記号は使えるが、教科書が日本語なため、教科書に合わせる。)

例題程度なら、流れに沿えば解ける。

集合Sの元、x、yを用意する
$S=\{\underset{②}{c\boldsymbol{u}} \mid \underset{①}{c\in\mathbb{R}}\}$だから、
①実数c, dを用意し、② $x=c\boldsymbol{u},\ y=d\boldsymbol{u}$とする
任意の実数αを用意し、
$x+y$とαxを計算。今回であれば
$x+y=(c+d)\boldsymbol{u}\in S$
$c\boldsymbol{u}$の形で、$c+d\in\mathbb{R}$だからSの元。
$\alpha x=(\alpha c)\boldsymbol{u}\in S$
$c\boldsymbol{u}$の形で、$\alpha c\in\mathbb{R}$だからSの元。
定義よりSは$\mathbb{R}^2$の部分空間となる。

(2) $T=\left\{\begin{pmatrix}1\\c\end{pmatrix} \mid c\in\mathbb{R}\right\}$

A. $x\in T,\ y\in T$とする。このときある実数c, dが存在して$x=\begin{pmatrix}1\\c\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}1\\d\end{pmatrix}$を満たす。
上記のαに対して
$x+y=\begin{pmatrix}2\\c+d\end{pmatrix},\ \alpha x=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha c\end{pmatrix}$が成立。
Tは第1成分が1であるような2項数ベクトル全体の集合であるため、$x+y\notin T$.
($\alpha=1$でのみ$\alpha x\in T$を満たすが、$\alpha\neq1$で$\alpha x\notin T$である。)
Tは$\mathbb{R}^2$の部分空間ではない。//

流れは一緒。
集合Tの元x、y(ベクトル)を用意。
$T=\left\{\underset{②}{\begin{pmatrix}1\\c\end{pmatrix}} \mid \underset{①}{c\in\mathbb{R}}\right\}$だから、
①実数c, dを用意し、② $x=\begin{pmatrix}1\\c\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}1\\d\end{pmatrix}$とする
上記のαに対して
$x+y$とαxを計算 → 判断
2つともが、$\begin{pmatrix}1\\実数\end{pmatrix}$となればよいが、
$x+y$では第1成分が1でなく2だし、
αxは$\alpha=1$のときは満たすけど、任意のαで成立しない
定義より、部分空間でない

定義6.2, 6.3 チェック。

例題6.2

R^3 の部分空間 $V=\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v} \mid a,b\in R\}$, $W=\{c\mathbf{x}+d\mathbf{y} \mid c,d\in R\}$ に対して和空間 $V+W$, 共通空間 $V\cap W$ を求めよ.

$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ である.

3次元

A. 定義6.2より

$V+W=\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{x}+d\mathbf{y} \mid a,b,c,d\}$ を得る.

ふつうに足しただけ。

$V+W$ は求まっているが, 3次元のベクトルを4つのベクトルで表しているから1つ消せるのでは となる.(細かい説明は省略)

$\mathbf{y}$ をその他の3つで表すことを考える.

$\mathbf{y}=a_1\mathbf{u}+b_1\mathbf{v}+c_1\mathbf{x}$ とすると,

$$\begin{cases} a_1+2b_1+c_1=0\\ b_1=1\\ a_1=1 \end{cases}$$

であるから, $a_1=1$, $b_1=1$, $c_1=-3$

ゆえに $\mathbf{y}=\mathbf{u}+\mathbf{v}-3\mathbf{x}$.

$$\because \begin{pmatrix}a_1\\0\\a_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2b_1\\b_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$a_1\mathbf{u}+b_1\mathbf{v}+c_1\mathbf{x}=\mathbf{y}$

したがって,

$\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{x}+d\mathbf{y} \mid a,b,c,d\in R\}$

$=\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{x}+d(\mathbf{u}+\mathbf{v}-3\mathbf{x}) \mid \sim\}$

$=\{(a+d)\mathbf{u}+(b+d)\mathbf{v}+(c-3d)\mathbf{x} \mid \sim\}$

$=\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{x} \mid a,b,c\in R\}$.

(a,b,c,d はもともと実数であるだけだから, 置き直した)

$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ であり, 第3成分をもつのは $\mathbf{u}$ のみ, 第2成分をもつのは $\mathbf{v}$ のみであるから, 2つのベクトルの線形結合では表せない。以上より,

$V+W=\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{x} \mid a,b,c\in R\}$。

$V\cap W$ について,

解答の流れをつかむ

$\mathbf{q}\in V\cap W$ とする

$\mathbf{q}\in V$, $\mathbf{q}\in W$ より,

ある実数 a_3,b_3,c_3,d_3 が存在して,

$\mathbf{q}=a_3\mathbf{u}+b_3\mathbf{v}$ (6.1)

$\mathbf{q}=c_3\mathbf{x}+d_3\mathbf{y}$ (6.2)

2式より

$a_3\mathbf{u}+b_3\mathbf{v}-(c_3\mathbf{x}+d_3\mathbf{y})=\mathbf{0}$

すなわち
$$\begin{cases} a_3+2b_3-c_3=0\\ b_3-d_3=0\\ a_3-d_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}a_3\\0\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2b_3\\b_3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_3\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\d_3\\d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

この方程式の係数行列を考えると,

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&0&-1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\boxed{-1}\\0&1&0&\boxed{-1}\\0&0&1&\boxed{-3}\end{pmatrix}$$

a b c d　不定列

$$\begin{cases} a_3-d_3=0\\ b_3-d_3=0\\ c_3-3d_3=0 \end{cases}$$

$d_3=s\ (s\in R)$ とおくと,

$a_3=s$, $b_3=s$, $c_3=3s$

これらを(6.1)あるいは(6.2)に代入すると,

$$\mathbf{q}=\underbrace{\begin{pmatrix}s\\0\\s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2s\\s\\0\end{pmatrix}}_{6.1}=\underbrace{\begin{pmatrix}3s\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\s\\s\end{pmatrix}}_{6.2}=s\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

となり,

$\mathbf{q}=s\mathbf{p}$, ただし $\mathbf{p}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ を得る

よって $V\cap W=\{s\mathbf{p} \mid s\in R\}$

注意6.2 必読。

教で $\mathbf{x}$ となっているが $\mathbf{q}$ では…?

$\mathbf{p}$ は使わなくても良い。

問6.1, 6.2は説明は減らす.

問6.1

(1) 与えられた集合をSとする。

$x \in S$, $y \in S$とすると, ある実数c, dが存在し,

$$x = c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ y = d\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$ を満たす.

αを任意の実数とすると,

$$x + y = (c+d)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \in S$$

$$\alpha x = \alpha c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \in S$$ が成立.

ゆえに部分空間である.

(2) 与えられた集合をTとする.

$x \in T$, $y \in T$とすると, ある実数c, dが存在し,

$$x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c\\1\end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}d\\1\end{pmatrix}$$ を満たす.

αを任意の実数とすると,

$$x + y = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c+d\\2\end{pmatrix}$$

$$\alpha x = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha c\\\alpha\end{pmatrix}$$ が成立.

$x + y \notin T$であり,

$$\begin{cases}\alpha x \in T & \text{if } \alpha = 1\\ \alpha x \notin T & \text{if } \alpha \neq 1\end{cases}$$

である. ゆえに部分空間でない.

問6.2 $u = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ とする.

そのとき.

$V + W = \{au + bv + cx + dy \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

ここで, $y = a'u + b'v + c'x$ とすると,

$$\begin{cases}-a' + c' = 0\\ a' + 2b' = 1\\ b' - c' = 0\end{cases} \quad \therefore a' = b' = c' = \frac{1}{3}$$

ゆえに $y = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}x$ であり,

$\{au + bv + cx + dy \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
$= \{au + bv + cx \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

となる.

線形従属なら書き表せる

u, v, xの中の1つが残り2つのベクトルの線形結合で書き表せるかを考える.

以下の連立方程式を考えればよい.

$x = a_1 u + b_1 v$ とし, $$\begin{cases}1 = -a_1\\ 0 = a_1 + 2b_1\\ -1 = b_1\end{cases}$$

$v = a_2 u + c_2 x$ とし, $$\begin{cases}0 = -a_2 + c_2\\ 2 = a_2\\ 1 = -c_2\end{cases}$$

$u = b_3 v + c_3 x$ とし, $$\begin{cases}-1 = c_3\\ 1 = 2b_3\\ 0 = b_3 - c_3\end{cases}$$

しかし上記のいずれの式も解をもたない.

したがってu, v, xは線形独立.

$$\therefore V + W = \left\{a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

$V \cap W$について, $g \in V \cap W$とする.

そのときある実数a_4, b_4, c_4, d_4が存在し,

$g = a_4 u + b_4 v = c_4 x + d_4 y$ を満たす.

すなわち $$\begin{cases}-a_4 - c_4 = 0\\ a_4 + 2b_4 - d_4 = 0\\ b_4 + c_4 = 0\end{cases}$$

係数行列を考えて,

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$d_4 = s\ (\in \mathbb{R})$ とおくと, $a_4 = \frac{s}{3}, b_4 = \frac{s}{3}, c_4 = -\frac{s}{3}$

P120〜　　感覚ではなく定義に基づいて計算することも大事。

これらより

$q = \frac{s}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{s}{3}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{s}{3}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ を得る.

$\therefore V \cap W = \left\{ \frac{s}{3}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$

→ sでも大丈夫なはず。

問6.3

$\mathbb{R}^n$を$\mathbb{R}^n$の空でない部分集合とし、$\mathbb{R}^n$に含まれる任意のベクトルx, yと任意の実数αに対して明らかに$x+y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha x \in \mathbb{R}^n$が成立.
ゆえに$\mathbb{R}^n$は$\mathbb{R}^n$の部分空間.

問6.4, 6.5 省略させてもらう。
6.6　明らかではある。
問6.2〜6のようなものを出してくるのはどうかと思う。参照、とかきながら問で出題し、答えはかいていない。ツッコみたい。

問6.7　qを$span(a, b)$に含まれる任意のベクトルとするとき、ある実数t, sが存在し、$q = ta + sb$を満たす.
ここで、条件より

$q = ta + s(ca)$
$= (t+cs)a$　となる.

$\therefore span(a, b) = span(a)$

問6.8　6.3のある解は、それを定数倍しても解となる。
ゆえに解全体の集合をS(空集合)として$x \in S$, $y \in S$としたときに$x + y \in S$ かつ $\alpha x \in V$が成立.
(α:任意の実数)
示された。
(例6.3も参照)

例6.3

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ の解空間

(定義6.5確認)

解法1)

係数行列を考えて $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

不定例

$x_3 = s (\in \mathbb{R})$とすると、

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = sp$　(ただし$p = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$)

ゆえに求める解空間は

$\{sp \mid s \in \mathbb{R}\} = span(p)$ である.

解空間は同次連立1次方程式の解であり、当然だが、解それぞれを実数倍したものもまた解である。spや$span(p)$はそれを表現している.(簡単に言えば)($\mathbb{R}^3$では直線)

解法2)

$x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ において、
$x_2 = a$, $x_3 = b$ $(a, b \in \mathbb{R})$とおくと、

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+b\\a\\b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$とすれば $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = au + bv$

$x_2 - x_3 = 0$において$x_1 = c$, $x_2 = d$とすれば
$(c, d \in \mathbb{R})$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\d\\d\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$とすれば $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = cx + dy$

$V = \{au + bv \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ $(= span(u, v))$,
$W = \{cx + dy \mid c, d \in \mathbb{R}\}$ $(= span(x, y))$
とすれば、方程式の解はVとWの両方を満たす.
ゆえに求める解空間は$V \cap W$となり、例6.2に同じとなる。ゆえに$span(p)$
(uとvは例6.2と逆)

線形独立なベクトルを次元の数だけ用意すればそれらのベクトルの集合は基底!

問6.9 さっき示してるから省略.
この問題もつっこみたい。

問6.10

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

係数行列を考えて,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

(不定列第3列より) $x_3 = s (\in \mathbb{R})$ とすると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7}s \\ \frac{5}{7}s \\ s \end{pmatrix} = \frac{s}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解空間は $\left\{ \frac{s}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$

意味する図形は原点を通る直線である.

$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ とすると, 解空間は $\mathrm{span}(a)$ であり,
P.121 6.2.1 と同様の議論ができる.

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$ ← 同じ式

係数行列を考えて,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから 000 が出現。

(不定列は第2列と第3列だから,)

$x_2 = s, x_3 = t \ (s, t \in \mathbb{R})$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求める解空間は $\left\{ s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$

意味する図形は原点を通る平面である。

P.121 6.2.2 と同様の議論が可能。

例題 6.4 とばし

注意6.3 $\boxed{\dim \mathbb{R}^n = n}$

例6.5.

A) $\{u, v\}$ について, 実数 c_1, c_2 に対して

$c_1 u + c_2 v = 0$. すなわち $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 = 0 \end{cases}$

$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

の関係式を考えると, これが成立するのは
$c_1 = c_2 = 0$ の場合のみである.
したがって u, v は線形独立. P.30

次に $\mathbb{R}^2$ に含まれる任意のベクトル $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ に対して

$p = \alpha u + \beta v$ すなわち $\begin{cases} \alpha + \beta = p_1 \\ -\alpha = p_2 \end{cases}$

を満たす α, β が存在するかを調べる.
方程式を解くと, $\alpha = -p_2$, $\beta = p_1 + p_2$ となる.
ゆえに u, v は定義を満たすから
$\{u, v\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である.

これからわかるように, 基底の条件の (i) は, 他のベクトルで表すことができる余分なベクトルが入っていないように, (ii) は, 基底ならば V の中の全ての要素が足し算で表せる (1次結合の形 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots$ で一意に記述できる (生成系である)) ということである。
高校で習った, 零ベクトルでなくかつ同一直線上にない2つのベクトルを使えばその平面のベクトルを, 零ベクトルでなくかつ3本が同一平面上にない3つのベクトルを使えば3次元空間中に存在する全てのベクトルを表せるのと似た話である。

(i) (ii)

$\{u\}$ は1つで $\mathbb{R}^2$ の基底となるわけなし。
$\{u, v, x\}$ は線形従属 (明らかに)
$\{u, y\}$ も $-u = y$ だから明らかに線形従属 (同一直線上)

となり, 基底ではないとわかる。しかし, 定義により確認することは大切なため, どのように定義に反するかという記述がなされているかは要チェックである。

P129 ~ P136

・定理6.1より 基底の数と次元は等しい。
定義6.8
$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底だけど、
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ だと標準基底。

例6.6 とばさせてもらうが、イメージとしては以下のようである。V について
まず、$c_1\mathbb{u}+c_2\mathbb{v}=\mathbb{0}$ が $c_1=c_2=0$ でのみ成立することを調べ、線形独立だと示す。まあ V+W などのときに消せなかったことからわかるが。
V に含まれる任意のベクトルを $\mathbb{q}$ とすれば、V は $\mathbb{R}^3$ の部分空間で、$a\mathbb{u}+b\mathbb{v}$ で表されるベクトル全体の集合だから、
$\mathbb{q}=a_1\mathbb{u}+b_1\mathbb{v}$ を満たす実数 a_1, b_1 が存在。
$a_1\mathbb{u}+b_1\mathbb{v}\in span(\mathbb{u},\mathbb{v})$ より、$\mathbb{q}\in span(\mathbb{u},\mathbb{v})$
以上より V の基底の一組は $\{\mathbb{u},\mathbb{v}\}$
（実数倍したものも基底）
基底ベクトルの数は次元と等しいから、
$\dim V = 2$ となる。
W も同様に考える。
V+W では、$\mathbb{u},\mathbb{v},\mathbb{x}$ が線形独立なことは調べており、$\mathbb{R}^3$ の部分空間でベクトル3つなので明らかに基底とわかる。$\{\mathbb{u},\mathbb{v},\mathbb{x}\}$
$\dim(V+W)=3$
$V\cap W$ は $S\mathbb{p}=span(\mathbb{p})$ と表されたため $\{\mathbb{p}\}$ で、同様に $\dim(V\cap W)=1$
$\mathbb{p}$ で1個

問6.11 $\left\{\underset{\mathbb{u}}{\underline{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}}, \underset{\mathbb{x}}{\underline{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}}\right\}$ 注意6.4. P128 下

実数 c_1, c_2 に対して、
$c_1\mathbb{u}+c_2\mathbb{x}=\mathbb{0}$ $\begin{cases} c_1+c_2=0\\ -c_1+2c_2=0\end{cases}$
を考えると、
成立するのは $c_1=c_2=0$ の場合のみより、
$\mathbb{u}$ と $\mathbb{x}$ は線形独立。…①
次に、$\mathbb{R}^2$ に含まれる任意のベクトル $\mathbb{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$ に対して
$\mathbb{p}=\alpha\mathbb{u}+\beta\mathbb{v}$ すなわち $\begin{cases}\alpha+\beta=p_1\\ -\alpha+2\beta=p_2\end{cases}$
を満たす α, β が存在するかどうかを調べる。
実数
$\alpha=\frac{1}{3}(2p_1-p_2)$
$\beta=\frac{1}{3}(p_1+p_2)$ のときこの式は満たされる。…②

①, ②より
$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である。//

問6.12
←.

問6.13 実数 $c_1, c_2, \cdots c_n$ に対して
$c_1\mathbb{e}_1+c_2\mathbb{e}_2+\cdots+c_n\mathbb{e}_n=\mathbb{0}$
すなわち $\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\\ \vdots\\ c_n=0\end{cases}$
を考えると、$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ の場合に限りこの関係式が成立。よって $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \cdots \mathbb{e}_n$ は線形独立。$\mathbb{R}^n$ に含まれる任意のベクトル
$\mathbb{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$ に対して　転置使いたい…
次の式を満たす実数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ が存在するかどうかを調べる。
$\mathbb{p}=\alpha_1\mathbb{e}_1+\alpha_2\mathbb{e}_2+\cdots+\alpha_n\mathbb{e}_n$
すなわち $\begin{cases}\alpha_1=p_1\\ \alpha_2=p_2\\ \vdots\\ \alpha_n=p_n\end{cases}$
明らかに存在。
以上より　示された。//

章末とか。

問6.14　問6.2 (P120)
問6.12.と同様のギロンから
答えが導き出せる。省略 sorry.
線形独立かどうかは2秒でわかるしね。
問6.15
ここまでの話が理解できていれば
考えるまでもないことがわかる。
答えは教科書の通りである。(雑い)

章末

1 (1) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x+y=1 \right\}$

今までと集合の感じが違うじゃん!
急になんで!? と泣いている人もいるだろう。
だが、なんてことはない。
同様に、条件を考えればいいだけである。

解) 与えられた集合をSとおく。
$u, v \in S$ とすると、
$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$　$x_1 + y_1 = 1$ …①
$v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$　$x_2 + y_2 = 1$ …② を満たす.
$u+v$ を考える.
$u+v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$
ここで、
$\underbrace{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}_{1(\because ①)\ \ 1(\because ②)} = 2$
となり、Sの元となる条件を満たさず、
$u+v \notin W$
ゆえに　部分空間ではない //
(任意の実数αを用いてαuを考えると、
$\alpha u = \alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha$ であり、
$\alpha u \in W$ となるとは限らずだめ.)

(2) (1)と同様に考えて、(省略)
$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$
となり $u+v \in W$ を満たす.
$\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix}$　$\alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1) = 0$
ゆえに $\alpha u \in W$
以上より　部分空間である //

(3) 与えられた集合をWとおく.
$u, v \in W$ とすると、
$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$　$x_1^2 + y_1^2 = 1$
$v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$　$x_2^2 + y_2^2 = 1$　を満たす.
$u+v = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$
ここで、
$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$
$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2$
$= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2)$
$= 2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2)$ となり、
$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = 1$ を満たすとは限らない。← 満たす場合はあるかもしれないが、常には(任意のベクトル∈Wでは)満たさない
任意の実数αを用いて、
$\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix}$　$(\alpha x_1)^2 + (\alpha y_1)^2 = \alpha^2(x_1^2 + y_1^2)$
$= \alpha^2$
$\alpha = 1$ または $\alpha = -1$ のとき $\alpha u \in W$ となるが、
任意の実数に対しては常には成立しない。
↑ 日本語おかしくなった
ゆえに　部分空間でない.

2. 与えられた集合(固有空間)をWとする。
(λに対する固有ベクトルをxとすると)
$W=\{x \mid Ax=\lambda x\}$ と表される

i) $0\in W$より (問題文より)
Wは空集合ではない
空集合でないのも条件の1つ

ii) $x, x'\in W$とすると、
$x+x' = Ax+Ax' = A(x+x')$ で
$= \lambda x+\lambda x' = \lambda(x+x')$
$\therefore x+x'\in W$

iii) αを任意の実数とすると、
$A(\alpha x)=\alpha Ax=\alpha(\lambda x)=\lambda(\alpha x)$
となるから
$\alpha x\in W$
i)〜iii)より 部分空間であることが示された。

3. 固有ベクトルを見ればわかる。
A)
$\lambda=-5$のとき 固有ベクトルは
$s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(s\neq 0)$ だから、
固有空間の次元は1で、意味するのは原点を通る直線。後も同様で省略。

4.
$$x=\begin{pmatrix}\alpha_1 v_1\\ \vdots\\ \alpha_r v_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 v_1\\ \vdots\\ \beta_r v_r\end{pmatrix}$$
と表され、
条件より$v_1,\cdots,v_r$は線形独立性があるから、
$$\begin{cases}\alpha_1 v_1=\beta_1 v_1\\ \vdots\\ \alpha_r v_r=\beta_r v_r\end{cases}$$
ゆえに$\alpha_i=\beta_i\ (i=1,\cdots,r)$となり示された。

部分空間と示すには、
教科書の2つの条件式をまとめた式も使える。

線形空間のϕでない部分集合Wが部分空間となるための必要十分条件は、

I
$$\begin{cases}(1)\ x, y\in W \text{ならば } x+y\in W\\ (2)\ x\in W, c\in R \text{ならば } cx\in W\end{cases}$$

II
任意の$x, y\in W$と任意の$\lambda, \mu\in R$に対して
$\lambda x+\mu y\in W$