iPhoneの場合は右上の
⇧を押して，Booksかファイルに
保存すればいつでも見れる

岐阜大学

DATE　　CHECK　　NO. 1

実例詳細 線形代数 5章

わっしょいみっきー

・これはあくまでも理解を手助けするものである．　・細かなミスが生じる場合がある．
・まずは行列についての超簡単な復習をする．
・また，行列式（サラスの公式や余因子展開）がわからない人は4章「行列式」を確認必須である。
・できる限り教科書の教え方に合わせる。

・行列って何？（教P32）

m, nを自然数とし，$i=1,2,\cdots,m$および$j=1,2,\cdots,n$に対して
mn個の数a_{ij}を次のように並べたものを（縦m，横n個の長方形に）
m行n列の行列／$\underset{行}{m}\times\underset{列}{n}$行列／$(\underset{行}{m},\underset{列}{n})$行列　という．

$$\underset{通常大文字}{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 2列 & & n列 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ 2行 \\ \\ m行 \end{array}$$

a_{ij}：成分；(i,j)成分

※$m\times1$行列→m次元列ベクトル
$n\times1$行列→n次元行ベクトル

横縦に対応するのが行列だが，どうしてもわからなくなる時の覚え方．
ぎょうれつ or ギョウレツ　ひらがなまたはカタカナの一画目でたてかよこか判断！（笑）

行列についてはかきたいことが大量にあるが，そうすると5章に全然たどりつけなくなるため，さっそく5章をはじめる．

・固有値と固有ベクトル

定義　$\underbrace{A\boldsymbol{x}}=\overset{固有値}{\lambda}\underset{固有ベクトル}{\boldsymbol{x}}\quad(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$

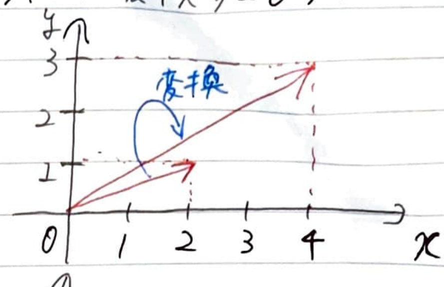
$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$では常に式が成り立つが，実際的な意味がなく，つまらないし議論する必要がないから省かれている

Q.固有値固有ベクトルとは何か．（難※）
A．まず，前提として，1つの見方としては行列はベクトルを別のベクトルに変換させるものである．
通常，ベクトルに行列を作用させる（かける）と，向きも大きさも変化する．
しかし，上の式を見ればわかるように，$\boldsymbol{x}$にAを作用させてもλという定数倍しか変わっていない。すなわち，向きが保存されている．しかし長さ$\|A\boldsymbol{x}\|$はもとの長さ$\|\boldsymbol{x}\|$から変化しうる。このような向きが変化しないAに特有なベクトルを固有ベクトルといい，固有値はその長さの変化率（倍率）を表しているのである．
固有値と固有ベクトルというのはセットででてくる．

※ 一つの見方として、行列はベクトルを別のベクトルに変換するもの。

ex.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}}_{\text{変換}}\overset{\text{作用}}{\curvearrowright}\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{\text{ベクトル(旧)}}=\underbrace{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}_{\text{ベクトル(新)}}$$



行列によってベクトルが変換されている。

注) 3, 4, … 次元でも同様である。
次元が変わることもある。

向きがもし変わらなければ固有ベクトル。
倍率が固有値。

(一般に $x' = Ax$ と表されるものを一次変換という)

また、行列の積は、分配則など(積の交換法則以外が)普通の数と同じように扱えるように定義されているため、少し計算が複雑になっているのである。

・固有値固有ベクトルの求め方

正方行列 A が与えられたときに、Aの固有値と各固有値に対応する固有ベクトルを求める手順を以下に示す。

(1) $|A-\lambda E|=0$ を解いて固有値λを求める。$\lambda=\lambda_i\ (i=1,2,\dots)$

(2) $(A-\lambda_i E)x=0$ を解いて固有ベクトルxを求める。$x=x_i\ (i=1,2,\dots)$

上の求め方を用いれば問題はとけるが、なぜそうなのか知っていないと、線形代数はただの計算ドリルと化すため、理由をまず述べる。

単位行列はベクトルかえない

まず、 $Ax=\lambda x$ をとこうと考える。だから$(A-\lambda)x=0$としたいが、行列とただの数は引き算できないため、λx を λEx とする(EをかけるもしくはEがかくれててExだったと考える) E:単位行列。 行列と行列で計算可能になる。

↓

$(A-\lambda E)x=0$ をとこうと考える。

$x=0$以外の解を求めたいが$(A-\lambda E)$という行列がもし逆行列をもてば逆行列を両辺にかけて$x=0$となり、$x=0$しか解ないんだあとなってしまう。
ゆえに$(A-\lambda E)$は少なくとも逆行列をもたない必要がある。
→逆行列をもたないためには行列式がゼロである必要がある。(正則行列でない)
(P9系4.2.などより)

↓

$\underbrace{|A-\lambda E|=0}_{\text{Aの固有方程式}}$ を解こう　$\underbrace{\lambda}_{\text{固有値}}=\lambda_i\ (i=1,2,\dots)$ が決まる

→ 続く

$(A-\lambda E)x=0$ をとけばよかったから,
$(A-\lambda_i E)x=0$ をとく. $x=x_i\ (i=1,2,\dots)$ が求まる
固有ベクトル　となる.

逆行列をもたないからといって, $x=0$ 以外の解をもつとは限らないのでは
と思うかもしれないが, $|A-\lambda E|=0$ を満たす λ にはそれに対応する x が
存在すると数学的に証明できるため.(P91 系4.4.) $|A-\lambda E|=0$ をとくことは
本当に固有値 λ を計算していることと同値となる. しかし, 実際的には
$(A-\lambda E)$ が逆行列をもたないためには $|A-\lambda E|=0$ を満たす必要があり,
でてきた λ が答えの候補。それを $(A-\lambda E)x=0$ に代入すると x が求まるから
それらが固有値固有ベクトルだという認識でも大して問題はないのではなかろうか。

前おきが長くなってしまったが, ここから問題をといていく(問5.1)
まず練習(演習)には途中式まである例題5.1.を活用するとよい.

問5.1. 次の行列の固有値固有ベクトルを求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$　　$A=\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$ とおく.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -5 \\ 10 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(8-\lambda)(-7-\lambda)-(-5)\cdot 10$$
$$=\lambda^2-\lambda-6$$
$$=(\lambda+2)(\lambda-3)=0$$

$\therefore$ 固有値は $\lambda=-2, 3$ である.

教科書についているので この条件はかいて おこう。

i) $\lambda=-2$ について

$\begin{pmatrix} 8-(-2) & -5 \\ 10 & -7-(-2) \end{pmatrix}$

連立方程式

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x_1-x_2=0 \iff \begin{cases} x_1=s_1 \\ x_2=2s_1 \end{cases}$$

$x\neq 0$ となるために

$\therefore x_1=s_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　(s_1 は任意定数, $s_1\neq 0$) 省略されることも多い

ii) $\lambda=3$ について

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_1-x_2=0 \iff \begin{cases} x_1=s_2 \\ x_2=s_2 \end{cases}$$

$\therefore x_2=s_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ゆえに固有値 $-2, 3$, 固有ベクトルはそれぞれ $s_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, s_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$(s_1, s_2\neq 0)$ //

ここで，何で任意定数でてくるんだろう？と思った人がいるかもしれない．
固有値固有ベクトルの定義は $Ax=\lambda x$ だが，この両辺を定数倍（C倍）すると，$A(cx)=\lambda(cx)$ となる．↙逆方向も固有ベクトル
すなわち x が固有ベクトルなら，その定数倍もまた固有ベクトルとなるのである．

問5.1 (2)

$$A=\begin{pmatrix}4&1&-3\\2&1&-1\\6&1&-5\end{pmatrix}$$ とおく

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&1&-3\\2&1-\lambda&-1\\6&1&-5-\lambda\end{vmatrix}$$

サラスの公式

$$=(4-\lambda)(1-\lambda)(-5-\lambda)+2\cdot1\cdot(-3)+6\cdot1\cdot(-1)-(-3)(1-\lambda)\cdot6-(-1)\cdot1\cdot(4-\lambda)-(-5-\lambda)\cdot1\cdot2$$

$$=-\lambda^3+4\lambda$$

$$=-\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)=0$$

より，$\lambda=0,\pm2$（3×3行列のときは3次方程式となるから λ は3つとなる）

i) $\lambda=0$ のとき

$$\begin{pmatrix}4&1&-3\\2&1&-1\\6&1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}4x_1+x_2-3x_3=0\\2x_1+x_2-x_3=0\\6x_1+x_2-5x_3=0\end{cases}$$

$$\therefore x_1=-x_2=x_3$$

やっていることは何も変わらないため
あたり前だが，$A-\lambda E$ の行標準形と
その不定列を考えてもよい．　0の列
左を例にすると，↓ここに0を入れれば（P62 3.8と同じ）

$$\begin{pmatrix}4&1&-3\\2&1&-1\\6&1&-5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$x_1-x_3=0$$
$$x_2+x_3=0$$
$$\therefore x_1=-x_2=x_3$$

となり同じものを得る．

※ $A-\lambda E$ は係数行列

ii) $\lambda=2$

$$A-2E=\begin{pmatrix}2&1&-3\\2&-1&-1\\6&1&-7\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}ax_1+bx_2=0\\cx_1+dx_2=0\end{cases}$$ を解くときと同じ

$$\therefore\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$$

$$\therefore x_1=x_2=x_3$$

行の変形が連立方程式をといているのと同等だと考えると，ある行を定数倍したものを他の行に足したり，ある行を定数倍したり，行同士を入れかえられる．また，単純に列を入れかえてはいけない理由など変形の法則がわかるであろう。（教P65）

文字の係数を入れ換えることになる．

不定列の説明は後にもあるが，教P52）

iii) $\lambda = -2$

本来 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるため不定列は第3列

$$A+2E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$x_3 = s_1$ とおいている

以上より

固有値は $0, 2, -2$. 固有ベクトルはそれぞれ $s_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(s_1, s_2, s_3 \neq 0)$ //

(3)
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ とおく.}$$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & -5-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda+2)(\lambda+5)+4+4-(\lambda+5)-4(\lambda+2)+4\lambda$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda^2+6\lambda+5)$$ ← 余談だが、この程度であれば組立除法は用いる必要はなく、係数を意識すれば因数分解できる.(計算が合っていれば)
$$= -(\lambda+1)^2(\lambda+5) = 0$$
より $\lambda = -1$ (2重解), -5

重解のときは重解とかこう!

i) $\lambda = -1$ (重解) について ← 重解でもとき方は変わらないがちょっと注意.

$$A+E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ — ランクは1

(上の式は $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ であることを示している
これは解を確定させるための条件式が2つ足りないわけだから、二つ分の自由度がある. その自由度を表す二つの変数 s_2, s_3 を用意するというわけである.)

$x_2 = s_2$, $x_3 = s_3$ とすると、 ← 数にあわせるためこうした.(s_2 s_3)

$$\begin{cases} x_1 = -2s_2 + s_3 \\ x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \end{cases}$$

∴ 固有ベクトルは $s_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s_2, s_3) \neq (0, 0)$

注意

この条件を $s_2 \neq 0, s_3 \neq 0$ としてしまう人がいるが、それはまちがいである. この条件は $s_2 = s_3 = 0$ の場合を除外しているので あり、s_2, s_3 のどちらか片方が0となることは許容しているからである(自由度が2以上のときは注意)

ii) $\lambda=-5$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = s_1$ とおくと、 ← 不定列に変数を与えるのが基本である。

固有ベクトルは $s_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s_1 \neq 0)$

不定列は単位行列が書かれてない列(最初のn個の零ベクトルからなる列)(P52) である。

(4) $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(1-\lambda)^2 + 2 - 6 + 2 - 2\lambda + \lambda - 6 + 6\lambda$$
$$= -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8)$$
$$= -(\lambda-2)(\lambda^2 \quad -4)$$
$$= -(\lambda-2)^2(\lambda+2) = 0$$

より 固有値 λ は $-2,\ 2$ (2重解)

i) $\lambda=-2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = s_1$ とおくと、

固有ベクトルは $s_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s_1 \neq 0)$

ii) $\lambda = 2$ (重解)

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = s_2$ とすると

固有ベクトルは $s_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s_2 \neq 0)$

(5) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ とおく.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= 9-6\lambda+\lambda^2+4$$
$$= \lambda^2-6\lambda+13=0$$

より $\lambda = 3\pm 2i$

i) $\lambda = 3-2i$

$$\begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 - ix_2 = 0$$

固有ベクトルは $s_1\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s_1 \neq 0)$

ii) $\lambda = 3+2i$

固有ベクトルは $s_2\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s_2 \neq 0)$

△ 複素数でも同じ。

成分が実数の行列でも固有値が虚数になる場合がある. これは係数が実数の n 次方程式でも解が虚数になることがあるからである.

固有値が虚数ならば固有ベクトルも成分に虚数を含み, また, 実数を成分とする行列で, 固有値も全て実数ならば固有ベクトルの成分も全て実数と考えるのが一般的である。

・行列の対角化 (P102〜)

正方行列 A に対し $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P が存在するとき, A は対角化可能であるという。また, 対角行列 $P^{-1}AP$ を求めることを A を対角化するという. A が対角化可能でないとき, A は対角化不可能であるという.

事実から述べると, n 次行列 A の固有ベクトルを並べた n 次行列 P が正則ならば, $P^{-1}AP$ は固有値を対角成分にもつ対角行列となる.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

A が対角可能かどうかが重要になってくるが,

- A が対角化可能ならば A の固有ベクトルの中に線形独立なものが n 個存在 (n 個存在しないとき対角化不可能)
- 固有値が全て相異なれば正方行列は対角化可能であるという事実を用いると次のようになる. (証明などは教P102〜にまかせる.)

まずはとけるようになることが重要である。

P106

行列の対角化の手順

n次行列Aが与えられたときに、Aが対角化可能であるか調べ、可能ならば対角化を行う手順。

① Aの固有値と固有ベクトルを求める。

② 固有値が全て相異なるか

- YES → Aは対角化可能
- NO → ③ 線形独立な固有ベクトルがn個存在するか
  - YES → Aは対角化可能
  - NO → Aは対角化不可能である。手順は終了。

線形独立な固有ベクトルを並べた行列Pを用いて $P^{-1}AP$ を求める。

練習には説明がのっている、例題5.2.をススメる。

問5.2 次の行列が対角化可能であるか調べ、可能ならば対角化せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$ 各行列の固有値固有ベクトルは問5.1において得られる。

固有値は$-2, 3$, 固有ベクトルはそれぞれ $s_1\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{x_1}, s_2\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_2}$ $(s_1, s_2 \neq 0)$ である。

全ての固有値が異なり、対角化可能である

$P = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}}_{x_1} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}}_{x_2} \end{pmatrix}$ とすればPは正則であり、$\underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}P}_{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。

固有値 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

問5.2 (2)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$ 固有値は $0, 2, -2$,

固有ベクトルはそれぞれ $\begin{array}{c} x_1 \\ s_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} x_2 \\ s_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} x_3 \\ s_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$

$(s_1, s_2, s_3 \neq 0)$

全ての固有値が異なるため、対角化可能である。

$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすれば P は正則であり、$P^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -5 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$x_1\ x_2\ x_3$ ← 並べてかく

固有値になるのだから、$P^{-1}AP$ を計算する必要はない。

(3)

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ 固有値 $-5, -1$ (2重解),

固有ベクトルはそれぞれ $s_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(s_1 \neq 0, (s_2, s_3) \neq (0, 0))$

この行列の固有値には重解があるが、(全ての固有値が異なるにあてはまらない)
線形独立な3つの固有ベクトル
$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が存在するため、対角化可能である。

← コンマはつけない

$P = (x_1\ x_2\ x_3)$ とすれば、P は正則で

$$P^{-1}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ となる。

(4)

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ 固有値は $-2, 2$ (2重解)

固有ベクトルはそれぞれ $s_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s_1, s_2 \neq 0)$

行列の固有値に重解があり、また、固有ベクトルの中に存在する線形独立なベクトルは最大でも2つであり3つは存在しない。
よってこの行列は対角化不可能である。

固有ベクトル自体は定数倍しても固有ベクトルだから無数に存在するが、線形独立なものは2つしかないということ。

問5.3 例5.4において $Q=(x_2\ \ x_1)$ とする.
$Q^{-1}AQ$ を求めよ. また, $Q^{-1}AQ$ は $P^{-1}AP$ とどのように異なるか述べよ.

$Q=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ $\quad Q^{-1}AQ=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$

$Q^{-1}AQ$ は $P^{-1}AP$ と対角成分に現れる固有値の順番が異なる.
固有ベクトルの順番が逆になっているから固有値の順番も逆になってくれないと困る.
順番を気にしなくていいということである.(対応関係さえあっていれば)

問5.4
省略(~~[illegible]~~

もし, とても余裕があれば, 教科書の証明なども確認すると,
より理解が深まる。

P107〜

5.3 対称行列の固有値問題と対角化

${}^tA=A$ が成り立つ実正方行列 A を対称行列という。

Aの転置行列(P39)　すべての成分が実数で、行と列の成分の数が等しい行列。

ex.

$$A=\begin{pmatrix}1&5\\2&6\\3&7\\4&8\end{pmatrix}\quad {}^tA=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}$$

例5.5. 例5.2のAは対称行列である。

注5.8. 教科書では全ての成分が実数の行列だけを対称行列としている。

シュミットなどに入る前に、5章の定理を一度まとめる。証明は教に主に載っている。

定理5.1. n次行列Aの固有値について、次の同値関係が成立する。
λはAの固有値 $\Longleftrightarrow$ λはAの固有方程式の解。

定理5.2. n次行列Aの固有ベクトルの中に線形独立なものがn個存在するとき、
Aは対角化可能である。そのような固有ベクトルを$x_1,\cdots,x_n$とし、
$x_1,\cdots,x_n$が固有値$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$にそれぞれ対応しているのであれば、
$P=(x_1,\cdots x_n)$は定義5.3を満たし、(5.6)が成立する。

定理5.3. n次行列Aの固有ベクトルの中に線形独立なものがn個存在しないとき、
Aは対角化不可能である。

定理5.4. $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$を正方行列$A$の相異なる固有値とする。このとき、
対応する固有ベクトル$x_1,\cdots,x_k$は線形独立である。

定理5.5. 固有値が全て異なる正方行列は対角化可能である。

定理5.6. 対称行列Aの固有値は全て実数である。(注:注意5.8)

定理5.7. 対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する。

定理5.8. 対称行列Aは直交行列を用いて対角化可能である。
すなわち、$P^{-1}AP={}^tPAP$が対角行列となるような直交行列Pが存在する。

直交行列　正方行列Pが${}^tPP=E$を満たすとき、Pを直交行列という。
(Pは正則だから、${}^tPP=E$の右からP^{-1}を掛ければ${}^tP=P^{-1}$を得る)

シュミットの直交化法 (P111)

シュミットの直交化法について述べるが、その前に直交行列について少し知っておくべきことがある。ここで述べるのは最低限知っておくべきものだけにとどめる。
それは、定義の ${}^tPP=E\ (\Leftrightarrow {}^tP=P^{-1})$ はもちろんのこと、
直交行列の列ベクトルは長さが1で、互いに直交している (P108 注意5.9より)
ということである。(名前の通りだが。) → また、逆にこうなれば直交行列といえる。

Aを対角化する直交行列Pを求めたいとき。

対称行列

n次行列Aの固有値が全て異なるときは、定理5.7 (P108) から各固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交するため、それらの中で長さが1のものを列ベクトルとする行列をPとすれば PはAを対角化する直交行列となる。
つまり、例題5.2 (P106) などで、$P=(x_1\ x_2\ x_3)$ としていたものを、

$$P=\left(\frac{1}{\|x_1\|}x_1\ \ \frac{1}{\|x_2\|}x_2\ \ \frac{1}{\|x_3\|}x_3\right)$$

とするだけで、Pは直交行列となり、例題5.3. (P112) のA_4などが解けるというわけである。

しかし、Aの固有値に重解が含まれていれば、そうはいかない。
だが、定理5.8 (P109) より少なくともAは対角化可能なのだから、Aはn個の線形独立な固有ベクトルをもっていることになる。
線形独立なベクトルn個から直交行列を求めることが実は可能であり、その方法にシュミットの直交化法がある。
(方法としているが、証明にも使われる)
n個の線形独立な固有ベクトルからシュミットの直交化法を用いてPが求まるというわけである。

グラム・シュミットの正規直交化法

線形独立なベクトル $x_1,\cdots,x_n$ が与えられたとき、$P=(p_1\ p_2\cdots p_n)$ が直交行列となるような $p_1, p_2, \cdots, p_n$ を求める手順。

① $p_1=\frac{1}{\|x_1\|}x_1$ とおく

② $u_2=x_2-(x_2,p_1)p_1$ を求め、$p_2=\frac{1}{\|u_2\|}u_2$ とおく。

③ $u_3=x_3-(x_3,p_1)p_1-(x_3,p_2)p_2$ を求め、$p_3=\frac{1}{\|u_3\|}u_3$ とおく

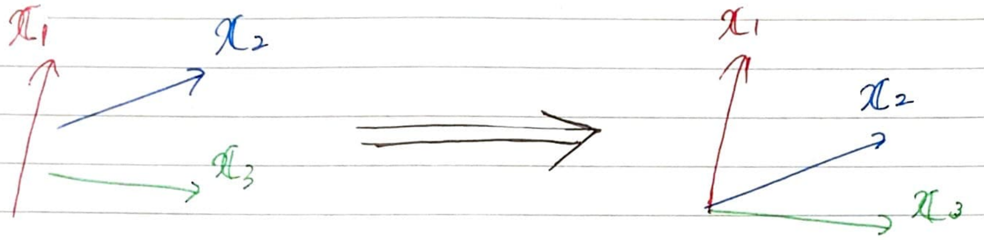
⋮

ⓝ $u_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}(x_n,p_k)p_k$ 　$p_n=\frac{1}{\|u_n\|}u_n$ とおく

おそらく p_3までしかテストでは問われない

【注意】 $(x_2, p_1)p_1$ は $(x_2\cdot p_1)p_1$ のことである。

次に、グラム・シュミットの直交化法は何をしているのかを述べるが、
問題がとけさえすれば良いという人は読みとばしてもかまわない。
4次元以上になると図で説明できないため、3次元までの図解である。
手順5.3.に沿った説明をする。
一次独立な3本の空間ベクトルを用意して、シュミットの直交化法を適用する。

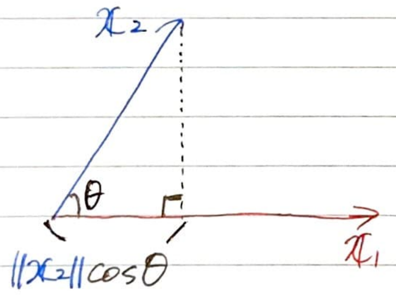


ベクトルはバラバラな方向を向いている。(ただし一次独立だから3本は同じ平面にはない)
ベクトルはどこへ動かしても同じだから、比較しやすいように根元を揃えた。

・1本目

$p_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$ とする。(長さ1にするために$\|x_1\|$で割った。)

・2本目　p_1に垂直かつ長さが1のp_2を求める。



x_1、x_2を左のように配置する。
ここで、2ベクトルのなす角をθとする。
このとき、左図のようにx_2の先端からx_1へ垂線を下ろすと、根元から垂線の足までの距離は
$|x_2|\cos\theta$となる。(いわゆる正射影)

$u_2 = x_2 - (x_2, p_1)p_1$ の $(x_2, p_1)p_1$は何を表しているのだろうか、かきかえてみると、

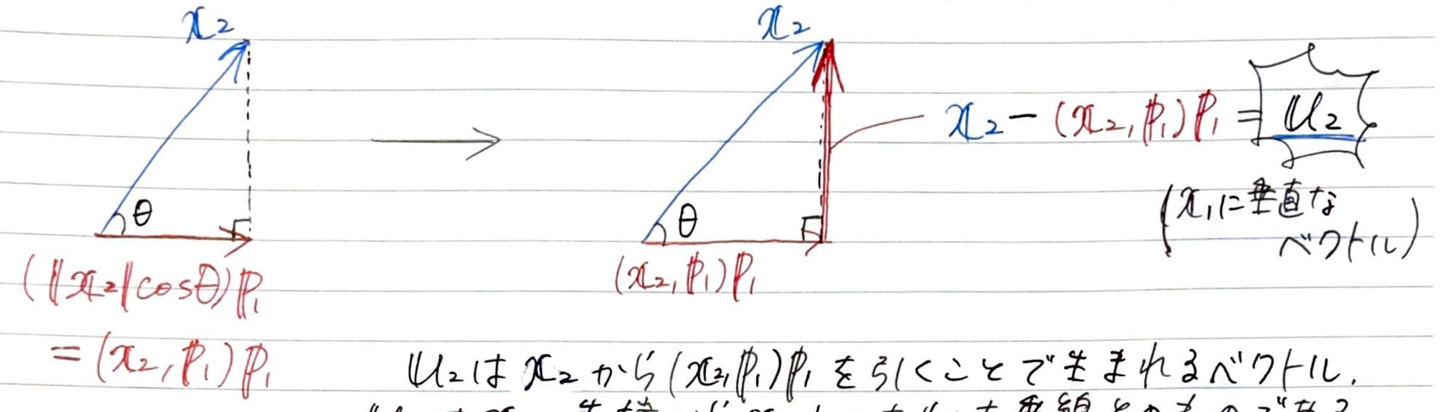
$(x_2, p_1)p_1 = (\|x_2\|\|p_1\|\cos\theta)p_1$ となる

p_1がe_xのような役割をはたしている

また、$|p_1| = 1$より $(\|x_2\|\cos\theta)p_1$ となる。
p_1の長さは1なのだから、$(\|x_2\|\cos\theta)p_1$というのは根元から垂線の足までの距離を長さにもつ、x_1とp_1と同じ向きのベクトルである。
それを図に示すと、次のようになる。 $\underbrace{\|x_2\|\cos\theta}_{\text{スカラー}}\ \underbrace{p_1}_{\text{ベクトル}}$

注) ちなみに、‖ベクトル‖はノルムを表す記号である。
ノルムとは"ベクトルの大きさ"の概念を一般化したものである。
縦棒一本の絶対値記号と同じように考えて問題ない

続く

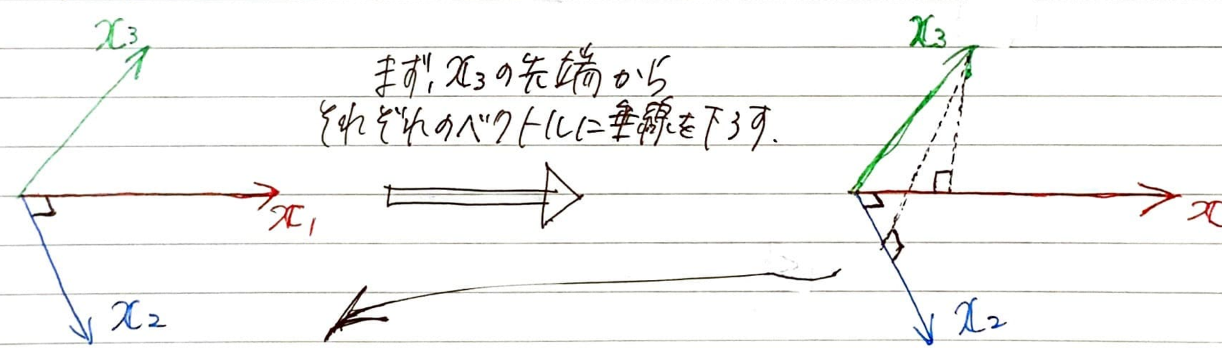


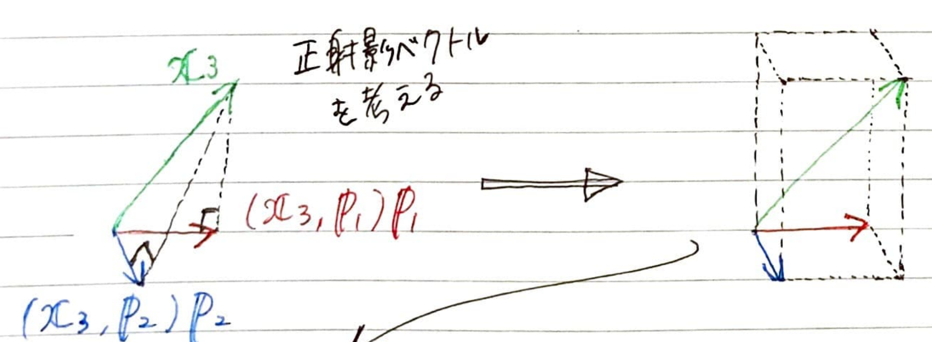
u_2はx_2から$(x_2,p_1)p_1$を引くことで生まれるベクトル。
u_2はx_2の先端からx_1上にたらした垂線そのものである。

ここで、長さを1にするために $p_2=\dfrac{u_2}{\|u_2\|}$ とすれば、
p_1と直交し、長さが1のベクトル、p_2が得られる。(2本のときはここでおわり)

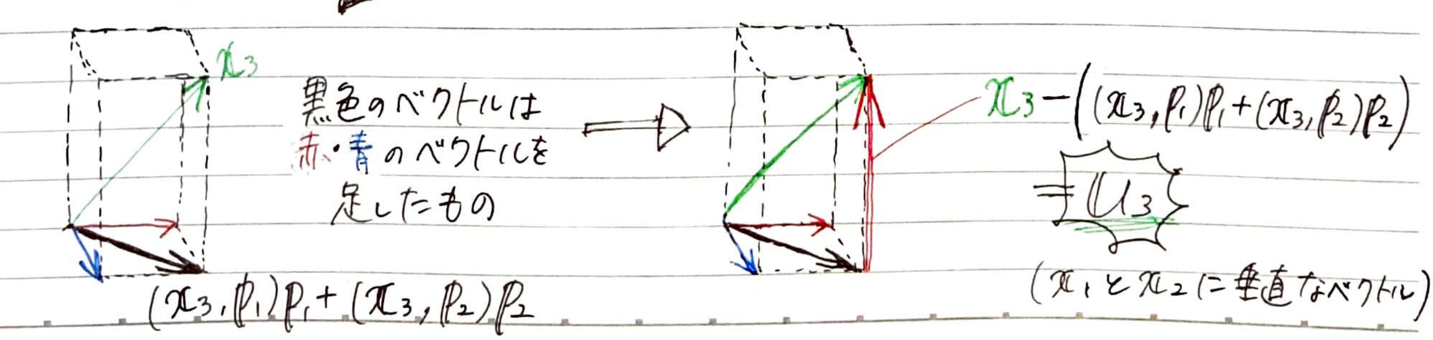
・3本目 p_1とp_2に垂直かつ長さが1のp_3を求める。

考え方は2本目の時とほぼ同じである。





平面で表現しているため
わかりにくいが、
3ベクトルが左のような
直方体を形作ることになる。



ここで，長さを1にするために

$$\mathbf{p}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3\|}\mathbf{u}_3$$ とすれば

$\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ に直交し，長さが1の $\mathbf{p}_3$ が得られる，
というわけである。

対称行列の直交行列による対角化の手順（手順5.4.）は次のようになる。
（n 次対称行列 A が与えられたときに，直交行列 P を用いて A を対角化する手順）

Start　A の固有値・固有ベクトルを求める。

固有値が全て異なる

各固有値に対応する固有ベクトルで長さが1のものを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ とすれば，$P=(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ は A を対角化する直交行列

固有値に重解がある。

n 個の線形独立な固有ベクトルに対し，シュミットの直交化法を行い，P を求める．$P=(\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3)$

Goal　${}^tPAP$ を求める（固有値を並べたものだから計算の必要はない）

・もしよくわからなくても，問題をときながら考えればわかるはず！
・今さらだが，対称行列（P107）と対角行列（P42）を混同する人がいるので注意である。

P112 例題5.3. で確認すると良い，

問5.5. 次の対称行列を直交行列を用いて対角化せよ．

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= 9-6\lambda+\lambda^2-1$$
$$= \lambda^2-6\lambda+8$$
$$= (\lambda-2)(\lambda-4)$$

ゆえに A の固有値は 2, 4

i) $\lambda=2$ のとき，同次連立一次方程式 $(A-\lambda E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ をとく．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s_1 \neq 0)$$

ii) $\lambda = 4$ のとき,

係数行列 $A-4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

係数行列 $A-\lambda E$ の行標準形の不定列は第2列であるため, $x_2 = s_2$ とおき, x_1 について解けば $x_1 = x_2 = s_2$ が得られる. これよりもとめる固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = s_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s_2 \neq 0)$ である.

固有値 2, 4 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $s_1 x_1$, $s_2 x_2$ $(s_1, s_2 \neq 0)$ とすると, 全ての固有値が異なるため, $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} x_2\right)$ とすれば P は直交行列で

${}^tP\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる.

$\frac{1}{\|x_1\|} x_1$ $\left[\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} x_1\right]$

固有値を並べたもの

(2)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ とする.

$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 & -2 \\ -5 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$= \{(1-\lambda)^2(-2-\lambda) - 20 - 20\} - \{4(1-\lambda) + 4(1-\lambda) + 25(-2-\lambda)\}$

$= (1-2\lambda+\lambda^2)(-2-\lambda) - 40 - 8 + 8\lambda + 50 + 25\lambda$

$= -\lambda + 4\lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda^3 + 33\lambda$

$= -\lambda(\lambda^2 - 36)$

$= -\lambda(\lambda+6)(\lambda-6)$

固有値は 0, 6, −6

i) $\lambda = 0$

$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s_1 \neq 0)$

ii) $\lambda = 6$

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -2 \\ -5 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s_2 \neq 0)$$

ii) $\lambda = -6$

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 12 & -12 & 0 \\ -5 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s_3 \neq 0)$$

固有値 0, 6, −6, 固有ベクトルをそれぞれ $s_1 x_1$, $s_2 x_2$, $s_3 x_3$ とする.
全ての固有値が異なるため $P = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} x_1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 \quad \frac{1}{\sqrt{3}} x_3 \right)$

とすれば, Pは直交行列で

$${}^tP \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -5 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$ となる.

固有値 0, 6, −6

$$\frac{1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ とする.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^3 + 1 + 1 - \{(2-\lambda)+(2-\lambda)+(2-\lambda)\}$$
$$= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 6 + 3\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$$
$$= -(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4)$$
$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

固有値は 1 (2重解), 4

i) $\lambda = 1$ のとき

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不定列は第2列と第3列だから，$x_2 = s_1,\ x_3 = s_2$ とすると，$x_1 = -s_1 - s_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s_1, s_2) \neq (0,0)$$

ii) $\lambda = 4$ のとき

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s_3 \neq 0)$$

固有値 1（2重解），4，固有ベクトルをそれぞれ $s_1 \boldsymbol{x}_1 + s_2 \boldsymbol{x}_2$，$s_3 \boldsymbol{x}_3$ とし，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ に対しシュミットの直交化法を用いると，

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} \boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1$$ 内積について 教(P4, 29)

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left((-1)\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← $\boldsymbol{p}_1$を$\boldsymbol{x}_1$に直している.

内積は成分どうしの積の和（スカラー）

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2\|} \boldsymbol{u}_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{2\|\boldsymbol{u}_2\|} \cdot 2\boldsymbol{u}_2$ として求めてもよい。

$$= \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{u}_3 = x_3 - (x_3, \mathbb{p}_1)\mathbb{p}_1 - (x_3, \mathbb{p}_2)\mathbb{p}_2$$

$\mathbb{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= x_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+1+0)\mathbb{p}_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}(-1-1+2)\mathbb{p}_2$$

$$= x_3 \left(= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathbb{p}_3 = \frac{1}{\|\mathbb{u}_3\|}\mathbb{u}_3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} x_3$$

$P = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)$ とすれば、Pは直交行列で

$${}^tP\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ となる。

ちなみに、この問5.5.の(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値に2が含まれることや

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値に1が含まれることは一瞬でわかる。

なぜなら、行列の成分が全て同じ値になれば $|A-\lambda E| = 0$ となることは明白だからである。(1)のもう1つの固有値4も $|A-\lambda E| = 0$ となることに気づければ、一目見ただけで固有値は2つともわかる。

問5.6. この問題自体は何も難しくはない。 $\bar{\ }$ は複素共役のバーである。

(5.10) 1つ目: $\lambda AB = A(\lambda B)$ (教P37)

2つ目: $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$ (P107 最後の2行にかいてある)

3つ目: $A = {}^tA$ (∵ Aは対称行列)

4つ目: ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ (教P40 問2.5(2))

5つ目: $Ax = \lambda x$ (固有値・固有ベクトルの定義)

(5.11) 1つ目: $(k\mathbb{a}, \mathbb{b}) = k(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ (定理2.2.(3) P29)

2つ目: $Ax = \lambda x$ (定義)

3つ目: $(x, y) = {}^tx y$ (P40 例2.9.)

4つ目: ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ (5.10 4つ目に同じ)

5つ目: $A = {}^tA$ (Aは対称行列)

6つ目: $(x, y) = {}^tx y$ (3つ目と同じ)

7つ目: $Ay = \mu y$ ($Ax = \lambda x$ に同じ)

8つ目: 1つ目と同じ

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とすると、

$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$

$\left(= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)$

${}^txy = (x_1 \ x_2 \cdots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$

問5.7. 定義5.5(P108) 直交行列 P は正則行列であることを示せ.
${}^tPP = E$ の両辺の行列式を考えると,

$|{}^tPP| = |E| = 1$ となる.

$$|{}^tPP| = |{}^tP||P| = |P||P| = 1 \cdots ⓟ$$

P90定理4.4. P82定理4.1.(かからなくてもいい)

(P91 系4.2.より) 行列 A が正則であることと $|A| \neq 0$ であることは同値であり, ⓟより $|P| \neq 0$ であることから, P は正則行列である. //

問5.8. 手順5.3.によって求められた p_1, p_2, p_3 が ${}^tp_ip_i = 1$, ${}^tp_ip_j = 0$ $(i \neq j), (i, j = 1, 2, 3)$ を満たしていることを示せ.

${}^tp_ip_i = (p_i, p_i) = \|p_i\|^2 = 1$ すなわち $\|p_i\| = 1$ であればよいが
$p_1 = \frac{1}{\|x_1\|}x_1$, $p_2 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2$, $p_3 = \frac{1}{\|u_3\|}u$ であるため, p_i は長さ1であるからこれを満たす. ゆえに ${}^tp_ip_i = 1$ を満たす.

内積を考えた

$$(p_1, u_2) = (x_2, p_1) - (x_2, p_1)\underbrace{\|p_1\|^2}_{=1} = 0$$

より p_1 と u_2 は直交する. u_2 と p_2 は同じ向きだから p_1 と p_2 も直交.
ゆえに ${}^tp_1p_2 = (p_1, p_2) = {}^tp_2p_1 = 0$ が示された … Ⓐ

$$(p_1, u_3) = (x_3, p_1) - (x_3, p_1)\underbrace{\|p_1\|^2}_{=1} - (x_3, p_2)\underbrace{(p_2, p_1)}_{Ⓐより0} = 0$$

同様に考えて p_1 と p_3 は直交し, ${}^tp_1p_3 = {}^tp_3p_1 = 0$ が示された.

$$(p_2, u_3) = (x_3, p_2) - (x_3, p_1)\underbrace{(p_1, p_2)}_{=0} - (x_3, p_2)\underbrace{\|p_2\|^2}_{=1} = 0$$

ゆえに p_2 と p_3 は直交し, ${}^tp_2p_3 = {}^tp_3p_2 = 0$ が示された.
以上より手順5.3によって求められた $p_1p_2p_3$ は ${}^tp_ip_i = 1$, ${}^tp_ip_j = 0$ $(i \neq j, i, j = 1, 2, 3)$ を満たす //

なお, シュミットの直交化法で得られる $p_1, p_2, \ldots, p_n$ を正規直交基底という.
(教P150で登場するワード)

正規 直交 基底
長さ1 どの2本も直交 全体を張る必要最小限のベクトルの集合.