基礎微分積分学 5章前半

PCを使ってGoogleでグラフを表示してくれるのはご存じだろうか。
2次元のグラフはもちろんのこと，3次元も簡単に表してくれる。
きっと重積分の理解に役立つであろう。

試しに，
z= x+y
z= x^2 +y
z= 2x^2 + 3y^2
z= x − y^3
などを入力し，検索してみよう。(他にもいろいろ試してみよう)

右下で範囲を指定できる

マウスで動かせる。

目次 … をかこうと思ったがやめた。

省略したここにかいていない教科書の問題をといたときは
見せてくれると本当に助かります。

積分区域の図
かいた方がいい
省略もしたけど。

教科書に沿ってすすめる。

・細かなミスが生じる場合がある。
・教にあること全てをかいているわけではない。

5.1 ・重積分

高校の頃までは$f(x)$など一変数関数の積分をやってきたが、二変数関数の積分をしたい！というときに自然に表れるのが重積分の考え方である。

(1) 縦線集合

(実は全然難しいことは言っておらず、自然に理解して問題をとけてしまう人が多い。~~というより問題とけるかに正直あんま関係ない気がしている~~ 知ってた方がいいが。)

区域：交わらない有限個のC^1級曲線に囲まれた有限閉領域およびその有限個の和集合(図5-1、テキストでの定義)

C^1級：微分可能で導関数が連続(連続微分可能、p64)

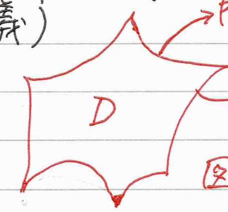


図5-1

定義域内で連続かつ有限個の点を除いて連続微分可能なことを区分的になめらかであるという。

気にしなくていいが細かくいえば、区分的とは区間$[a,b]$をとても細かく区切って、そのときに関数$f(x)$が成立する場合のことをいい、

区分的なめらかの定義は以下の2つである。

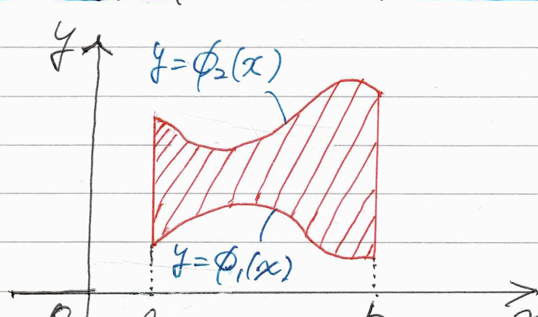
・定義1：関数$f(t)$が①,②を満たすとき、区間$[a,b]$で区分的に滑らか

①$[a,b]$で有限個の$t_1, t_2, \dots t_n$を除いたところで$f(t)$は微分可能で$[a,b]$の範囲で$f'(t)$が連続

② 不連続点t_k $(1 \leqq k \leqq n)$で$f(t)$および$f'(t)$の左側極限と右側極限が存在し、それが有限。

・定義2

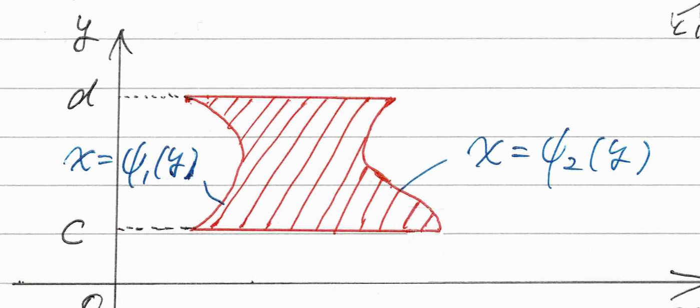
$f(t)$を周期2πの周期関数とし、この関数が$[-p,p]$上で区分的に滑らかなとき、$f(t)$を単に区分的に滑らかという。(定義の中に区分的に滑らかがでてくるおかしな定義である と思う)



y方向の縦線集合

$$\{(x,y) \in R^2 ; a \leqq x \leqq b, \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$$

上下が関数



x方向の縦線集合

$$\{(x,y) \in R^2 ; c \leqq y \leqq d, \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$$

左右が関数(xy座標上で)

(xとyを入れかえれば横線集合)

P129〜

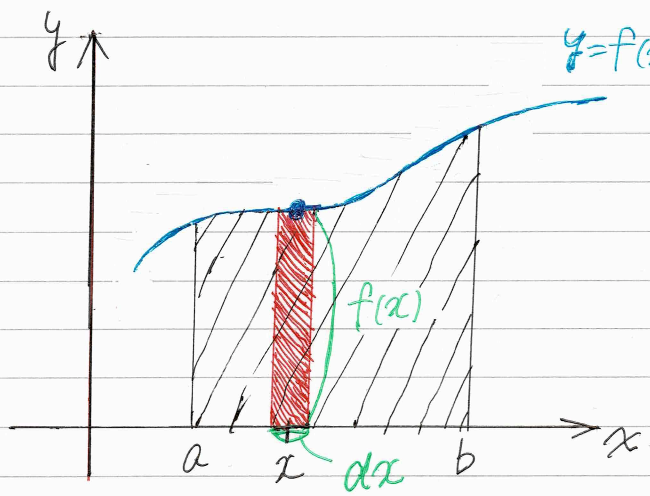
重積分の意味

教科書とかき方を少し変え、簡単に示す。(分割などははぶく)

◎ 重積分の意味

一変数関数

$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$ (符号付き) 面積

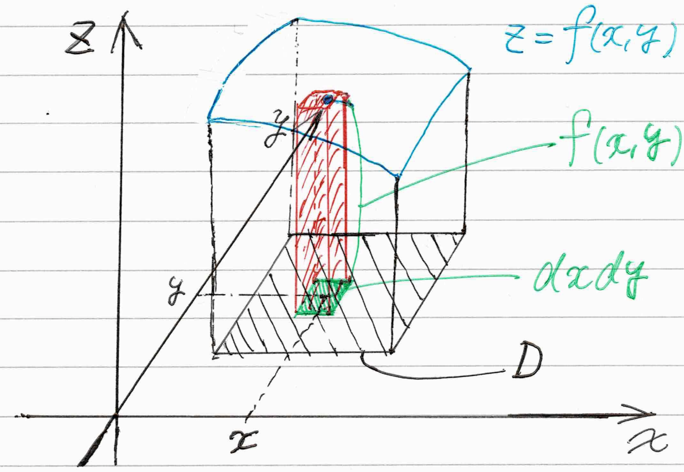


- $f(x)dx$ は微小長方形の面積
- 積分する領域は a から b
- $y=f(x)$ は曲線

二変数関数

$\iint_D f(x,y)dxdy$ — 重積分

$\Rightarrow$ (符号付き) 体積



- $f(x,y)dxdy$ は微小四角柱の体積
- 積分する領域は D
- $z=f(x,y)$ は曲面

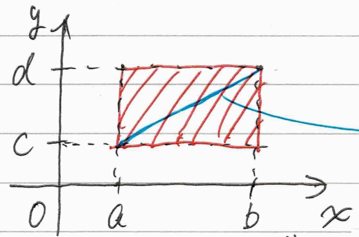
○ なぜ二変数関数の積分は3次元で考えるのか。

そもそも関数とは x にある値を入れると1つの値を返してくれるというものであった。($f(x)$) $x=1$ で $f(x)=2$ だよ〜というぐあいである。
つまり、入力を1つ決めると出力が1つということである。その値の結果(出力)を y 軸にとったのが $y=f(x)$ のグラフの曲線である。
対して、$f(x,y)$ など二変数関数の場合は、x に1、y に2を入れるとその時は5だよ〜というように、入力を2つ与えると出力が1つである。
だから、(入力)2つ+(出力)1つで、3次元で考えているのである。

p128~ 矩形・定義

xy平面上に平行な辺をもつ長方形

矩と間違える人がいるので注意



を **矩形(クケイ)** という.

矩形の直径 $|I|$

線分や点も矩形に含める.

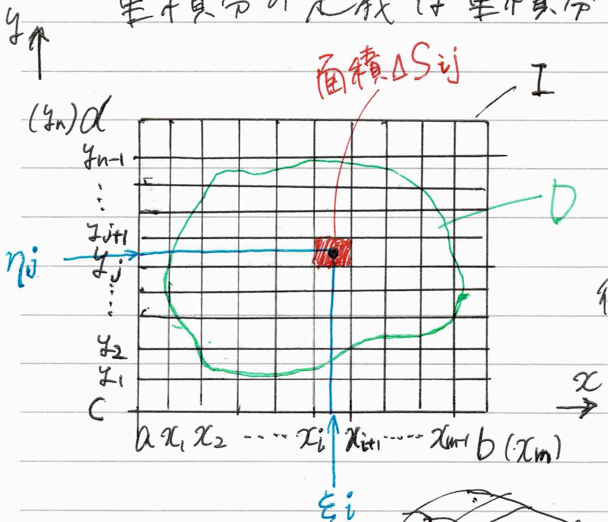
なお，矩形は通常，単に長方形をさす言葉とされている.

以下. $D=\{(x,y)\in R^2 ; a\leqq x\leqq b,\ \varphi_1(x)\leqq y\leqq \varphi_2(x)\}$ を
$D: a\leqq x\leqq b,\ \varphi_1(x)\leqq y\leqq\varphi_2(x)$ とかくこともある.

例1 (1) $D: \underbrace{-1}_{a}\leqq x\leqq \underbrace{1}_{b},\ \underbrace{0}_{\varphi_1(x)}\leqq y\leqq \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\varphi_2(x)}$ は y方向の縦線集合である.

重積分の定義(かんたんに)

重積分の定義は重積分の意味で示したものとほぼ同じ. i, j でかいただけ



積分する区域(矩形)を
小矩形に分割して考えている。

微小な四角柱の体積は $\underbrace{f(\xi_i,\eta_j)}_{\text{高さ}}\ \underbrace{\Delta S_{ij}}_{\text{底面積}}$ で与えられる.

全て足し合わせたものを考えて,

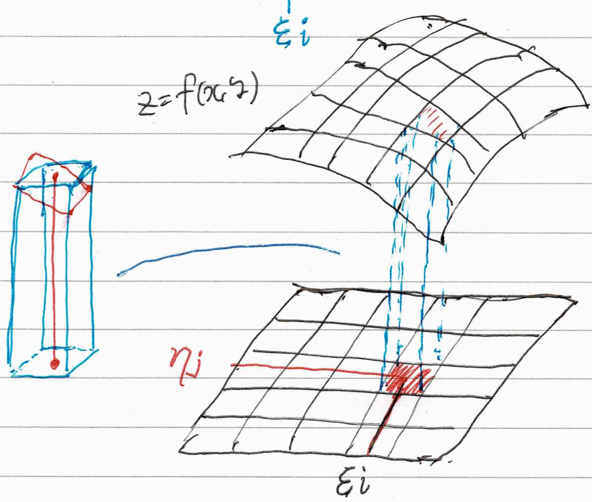
$$V_{mn}=\sum_i\sum_j f(\xi_i,\eta_j)\Delta S_{ij}$$

分割数m,nを大きくしていくと, 分割の仕方および ξ_i,η_j のとり方に関係なくある値Vに収束するなら, 式で表すと

$$V_{mn}=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\sum_i\sum_j f(\xi_i,\eta_j)\Delta S_{ij}$$ となるなら,

$f(x,y)$ は領域Dで積分可能であるといい,

$$V=\iint_D f(x,y)\,dxdy$$ と表す.



この極値Vを $f(x,y)$ のDにおける
2重積分という.

(終)

重積分の計算方法　累次積分

・重積分の計算方法は大きく分けて次の2つがある。

・累次積分　　・置換積分

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$$

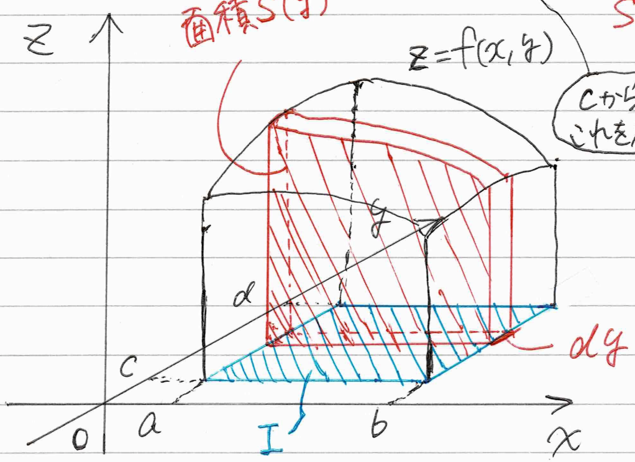
・累次積分（繰り返し積分）

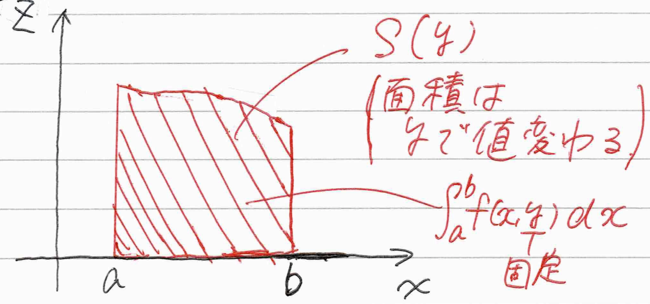
$$(*)\quad \iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,\overset{\text{固定}}{y})\,dx}_{=S(y)}\,dy = \int_a^b \underbrace{\int_c^d f(\overset{\text{固定}}{x},y)\,dy}_{=S'(x)}\,dx$$

微小の厚みかけて体積

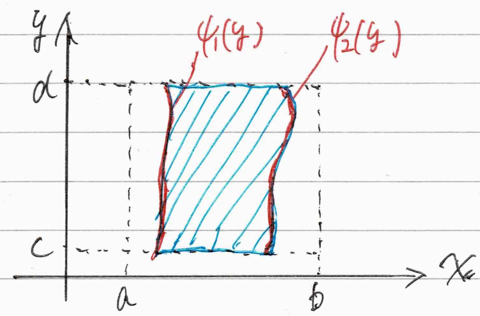
cからdまでこれを足し合わせる

xで切ったときの断面 $S'(x)$





・区域が長方形のときは上の図のようになる。
もし積分する区域が長方形でなければ、aとb（またはcとd）に関数が入るだけである。考え方は変わらない。



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

※x方向の縦線集合の場合。

$$\int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$$ ともかく。

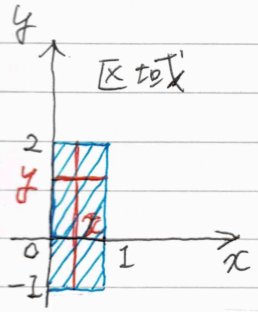
(*)の計算方法
① yを固定してxで積分
② yで積分

注）$f(x,y)$ は x と y どちらからから積分しても同じ結果となるが、どちらからしかできないもしくはどちらかの方がより良い場合がある。

累次積分法 計算具体例

ex.1 $\iint_D (3x-y)\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2\}$

3x−yを区域Dで積分しなさいという問題である。
まず、1つ注意なのは $z=3x-y$ という曲面を想像できる必要はないということである。(計算すれば理由がわかる) 区域が超重要である。



(解法1) yで切る→xでまず積分
さっきの図をイメージ(断面)

$$\iint_D (3x-y)\,dxdy$$

$$=\underbrace{\int_{-1}^{2}\int_{0}^{1}}_{Dより積分範囲を指定}\underbrace{(3x-\underbrace{y}_{yは固定するから定数とみなす})\,dxdy}_{S(y)}$$

"x=" はなくてもよい

$$=\int_{-1}^{2}\left[\frac{3}{2}x^2-yx\right]_{x=0}^{1}dy$$

↓xだけに0と1を代入

$$=\int_{-1}^{2}\left(\frac{3}{2}-y\right)dy$$

$$=\left[\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}y^2\right]_{-1}^{2}=3$$

(解法2) xで切る.

$$\iint_D (3x-y)\,dxdy$$

$$=\int_0^1\underbrace{\int_{-1}^{2}(3\overset{固定}{x}-y)\,dy}_{S'(x)}dx$$

$$=\int_0^1\left[3xy-\frac{1}{2}y^2\right]_{-1}^{2}dx$$

↓yに代入

$$=\int_0^1\left(9x-\frac{3}{2}\right)dx$$

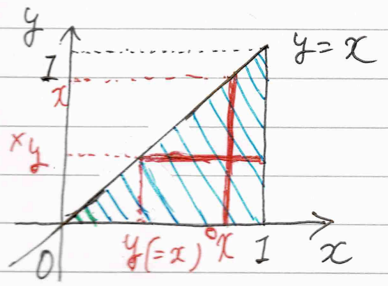
$$=\left[\frac{9}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_0^1$$

$$=3$$

→ 一致

曲面がわからなくても問題はとける。

ex.2 $\iint_D e^{x^2}\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ y\le x\le 1\}$



(解答)

$$\iint_D e^{x^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^1\underbrace{\int_0^x e^{x^2}\,dy}_{S'(x)}dx$$

$$=\int_0^1\left[ye^{x^2}\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx$$ ← これなら積分可能(可積分)

$$=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

yで切ると

$$\iint_D e^{x^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^1\underbrace{\int_y^1 e^{x^2}\,dx}_{S(y)}dy$$

やるべきでない方法

→ だが、e^{x^2}をxで積分できない → yから積分
(原始関数わからない)
気になる人はGoogle先生にきいてみよう。

累次積分　教科書の問題(P135〜)・順序変更

例3. 次の重積分の値を求めよ

$\iint_I (x^2+y^2)dxdy$, $I=[-1,1]\times[-1,1]$

$-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$　$[a,b]\times[c,d]$

$$\iint_I (x^2+y^2)dxdy$$
$$=\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)dx\right\}dy$$
$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2\right]_{x=-1}^{1}dy$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3}+2y^2\right)dy$$
$$=\left[\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}y^3\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

ちなみになつかしい公式

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$$

$f(x)$=偶関数 (奇関数は0に)

が使える

例4.

$\iint_D (x+y)dxdy$　$D: 1\le x\le 2,\ x\le y\le x^2$

(D= $a\le x\le b$, $\phi_1(x)\le y\le \phi_2(x)$ の形だから, Dはy方向の縦線集合→yから積分!の方がきっと良い)

$$\iint_D (x+y)dxdy=\int_1^2\int_x^{x^2}(x+y)dy\,dx$$
$$=\int_1^2\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x}^{x^2}dx$$
$$=\int_1^2\left(x^3+\frac{1}{2}x^4-x^2-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$=\frac{67}{20}$$

(教に図がのっている)

xから積分してもできるだろうが, 面積を分けて計算しないとダメだったりするから大変であると考えられる。

図形を見ればわかる。

(積分の順序変更P136の話と同じ)

よこにきると, 上下でわけなきゃいけない

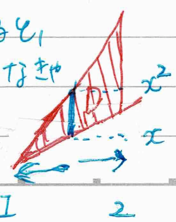


図5-11参照

例5. $\iint_D 2x\,dxdy$, $D: |x-1|+y\le 1,\ y\ge 0$

(左右を関数に挟まれているから, Dはx方向の縦線集合である)

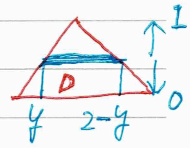
$|x-1|+y\le 1$ より $|x-1|\le 1-y$

∴ $y-1\le x-1\le 1-y$, $0\le 1-y$

また, $y\ge 0$も考慮して $y\le x\le 2-y$, $0\le y\le 1$

ゆえにDはx方向の縦線集合.

$$\iint_D 2x\,dxdy=\int_0^1\int_y^{2-y}2x\,dx\,dy$$
$$=\int_0^1\left[x^2\right]_y^{2-y}dy$$
$$=\int_0^1(4-4y)dy$$
$$=4-2=2$$



$\int_0^1$ のときは途中式なんていらない。

P136注意より,

実際に重積分を累次積分を用いて計算する場合, 積分区域を図示していずれの累次積分を用いるかを決めて行う.

例6. $\int_0^1 dx\int_x^{2x+1}f(x,y)dy$ の順序を変更せよ.

積分区域は図5-13(P137)のようになる.

Dはx方向の縦線集合の形で

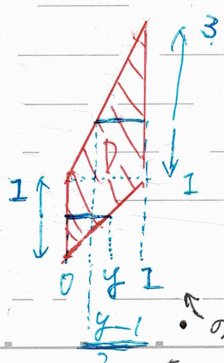
$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$

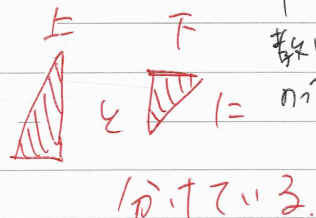
$\cup\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\le y\le 3,\ \frac{y-1}{2}\le x\le 1\}$

和集合("または")　とかける. ゆえに

$$\int_0^1 dx\int_x^{2x+1}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_{(y-1)/2}^{1}f(x,y)dx$$

教にのってる式





・x方向の縦線集合の図形に分けている.

↑の図を見て, 積分で面積を求めたいと思ったときを考えれば難しいことを言っていないことがわかるはず

累次積分 教科書の問(P137) 問2

問2 次の重積分を計算せよ

(1)

$$(\text{与式}) = \int_{-2}^{5}\int_{0}^{1}(x^2+2xy-4y^3)\,dy\,dx$$
$$= \int_{-2}^{5}(x^2+x-1)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-2}^{5}$$
$$= \frac{1}{3}\times 133+\frac{1}{2}\times 21-7$$
$$= \frac{287}{6}$$

(2)

$$(\text{与式}) = \int_{-2}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2e^y+x^2y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{-2}^{1}\left(\frac{2}{3}e^y+\frac{2}{3}y\right)dy$$ $\int_{-1}^{1}$は簡単
$$= \left[\frac{2}{3}e^y+\frac{1}{3}y^2\right]_{-2}^{1}dy$$
$$= \frac{2}{3}e+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}e^{-2}-\frac{4}{3}$$
$$= \frac{2}{3}(e-e^{-2})-1$$

(3)

$$(\text{与式}) = \int_{0}^{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(x+2y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{0}^{\pi}\left[-\cos(x+2y)\right]_{x=-\pi}^{0}dy$$
$$= \int_{0}^{\pi}\{-\cos(2y)+\cos(2y-\pi)\}\,dy$$
$$= \left[-\frac{1}{2}\sin 2y+\frac{1}{2}\sin(2y-\pi)\right]_{0}^{\pi}$$
$$= 0$$

結局sinの( )に入るのは
$-\pi, 0, \pi$ とかだけになるから
0 になるなと
予想はできる.

(4)

$$(\text{与式}) = \int_{-2}^{-1}\int_{-4}^{-2}(y^2e^{2x}-2\cos(x+y))\,dx\,dy$$
$$= \int_{-2}^{-1}\left[\frac{1}{2}y^2e^{2x}-2\sin(x+y)\right]_{-4}^{-2}dy$$
$$= \int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{2}y^2(e^{-4}-e^{-8})-2\sin(y-2)+2\sin(y-4)\right)dy$$
$$= \left[\frac{1}{6}y^3(e^{-4}-e^{-8})+2\cos(y-2)-2\cos(y-4)\right]_{-2}^{-1}$$
$$= \frac{1}{6}(-1+8)(e^{-4}-e^{-8})+2\cos(-3)-2\cos(-4)$$
$$-2\cos(-5)+2\cos(-6)$$
$$= \frac{7}{6}(e^{-4}-e^{-8})+2(\cos 3-\cos 4-\cos 5+\cos 6)$$

(5)

$y\sqrt{x+2y^2}$ をyの関数とみたときの原始関数を考える.

$(x+2y^2)^{\frac{3}{2}}$ をyについて微分すると, $\frac{3}{2}\cdot 4y\cdot(x+2y^2)^{\frac{1}{2}}$ だから, $\frac{1}{6}(x+2y^2)^{\frac{3}{2}}$ が原始関数.

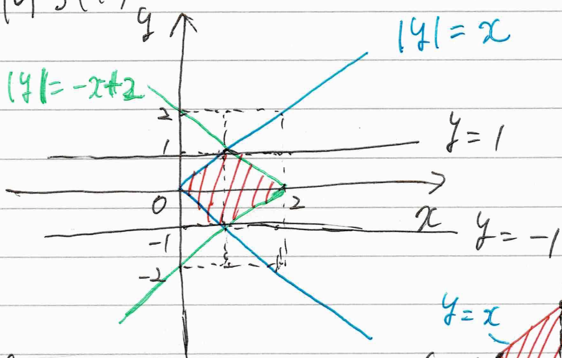
$$\iint_I y\sqrt{x+2y^2}\,dx\,dy = \int_{1}^{2}\int_{0}^{1}y\sqrt{x+2y^2}\,dy\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\int_{1}^{2}\left[(x+2y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}dx$$
$$= \frac{1}{6}\int_{1}^{2}\left\{(x+2)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right\}dx$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\left[(x+2)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}\right]_{1}^{2}$$
$$= \frac{1}{15}\left\{(4^{\frac{5}{2}}-3^{\frac{5}{2}})-(2^{\frac{5}{2}}-1)\right\}$$
$$= \frac{1}{15}\left\{(32-9\sqrt{3})-4\sqrt{2}+1\right\}$$
$$= \frac{1}{15}(33-4\sqrt{2}-9\sqrt{3})$$

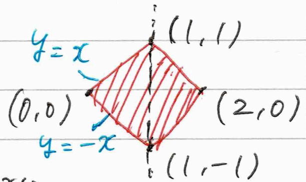
問2終了

数IIIの知識がとんでるから苦戦した

問3, 問4 (一部)

問3(1)





$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)$

(5式') $= \underbrace{\int_{-x}^{x}\int_0^1 xy^2\,dx\,dy}_{左半分} + \underbrace{\int_{x-2}^{-x+2}\int_1^2 xy^2\,dx\,dy}_{右半分}$

※ もし上の様にかいて x から積分するとこたえに x が残るので注意. 定数からかく。

$=\frac{1}{3}$　計算は面倒だったが, $\frac{1}{3}$ になった.

という変なとき方でもいいが, 通常は, そのまま範囲を代入して,

$$(5式) = \int_{-1}^{1}\int_{|y|}^{2-|y|} xy^2\,dx\,dy$$

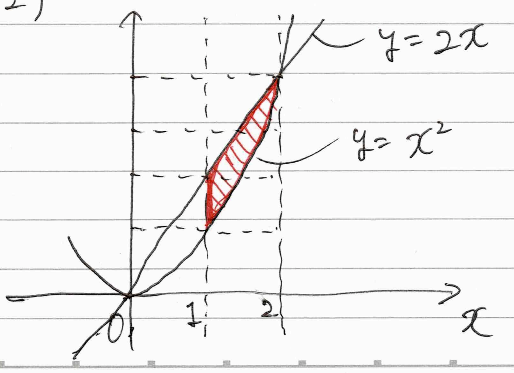
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\{(4-4|y|+y^2)y^2 - y^4\}dy$$

$$= \int_{-1}^{1}(2-2|y|)y^2\,dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{2}y^4\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{2}y^4\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{4}{3}-\frac{3}{3} = \frac{1}{3}$$ //

(2)



$$(5式) = \int_1^2\int_{x^2}^{2x} 2y\log x\,dy\,dx$$

順番注意

$$= \int_1^2 \left[y^2\log x\right]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_1^2 \{(4x^2\log x) - (x^4\log x)\}dx$$

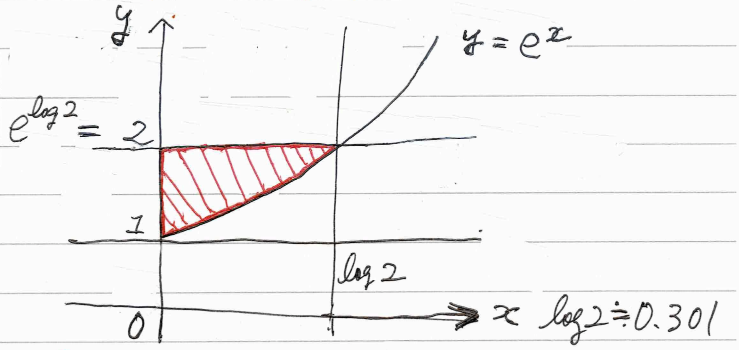
↓ 部分積分

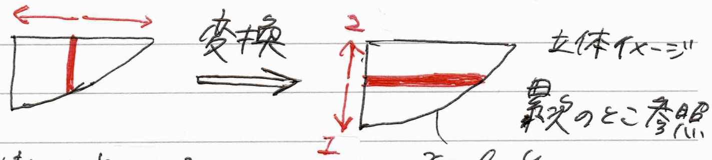
$$= 4\left(\frac{1}{3}\cdot 8\log 2 - \frac{7}{9}\right) - \left(\frac{1}{5}\cdot 32\cdot\log 2 - \frac{31}{25}\right)$$

$$= \frac{64}{15}\log 2 - \frac{421}{225}$$ //

問4

(2) $\underbrace{\int_0^{\log 2} dx}_{x範囲}\underbrace{\int_{e^x}^{2}}_{y範囲} f(x,y)\,dy$ を順変.





x・y軸を入れかえる考え方なども ある.

$$\int_1^2 dy\int_0^{\log y} f(x,y)\,dx$$ //

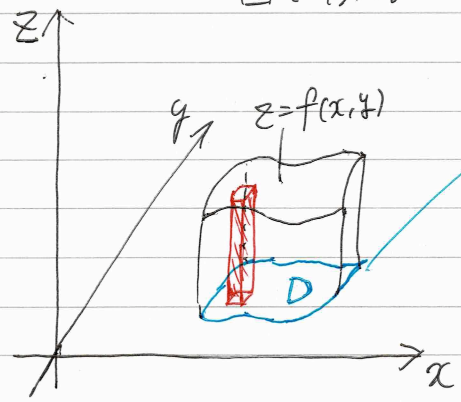
重積分の変数変換 p.138〜(極座標への変換)

point! 1変数関数の置換積分は $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

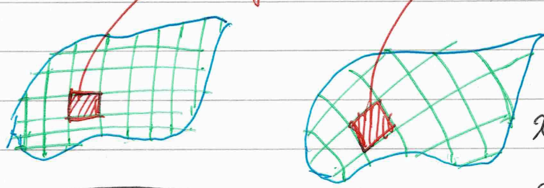
であったが重積分の場合も $\varphi'(t)$ に対応する関数が必要である。

・極座標への変換

図で考える



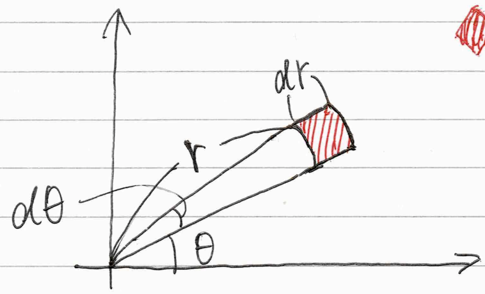
dxdy　　rdrdθ　(drdθではない)



原点からのきょり r
x軸からの正の傾き θ

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

rが大きくなるほどに
面積が大きくなるのは図からもわかる



◆ が rdrdθ となることの説明(導出)

$$◆ = \underbrace{\frac{1}{2}(r+dr)^2 d\theta}_{\text{全体の扇形の面積}} - \underbrace{\frac{1}{2}r^2 d\theta}_{\text{赤部分のぞいた扇形の面積}}$$

$$= \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{\text{微小が2次}} + \underbrace{\frac{1}{2}(dr)^2 d\theta}_{\text{微小が3次}}$$

微小が3次 だから無視

$$\xrightarrow[d\theta\to 0]{dr\to 0} \boxed{r\,dr\,d\theta}$$

ゆえに示された。

極座標に変換しても高さ(zの値)は変わらないが、
下の面積は少しゆがんで変わってしまう。
だから、単に dx, dy を dr, dθ に置き換えればいいわけではない。
極座標の場合は rdrdθ に換えて積分。

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

まだわかりにくいため、次で問題をといて確認する。(次の頁)

変換のヤコビアンを考えると、$u \leftrightarrow r$, $v \leftrightarrow \theta$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$$
$$= \underline{r}$$

説明はあとで。

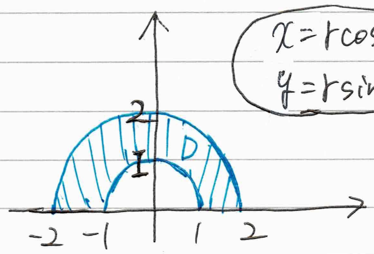
となり r が得られる。(P140 例18)

極座標変換は
円や楕円上の重積分を
計算するときに有益!

極座標への変換 具体例

ex. $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid 1\leqq \underbrace{x^2+y^2}_{r^2}\leqq 4,\ y\geqq 0\}$

$(r)\sin\theta \geqq 0$



$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

解答) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと、
区域 D は
$E=\{(r,\theta);\ 1\leqq r\leqq 2,\ 0\leqq\theta\leqq\pi\}$ に対応する。

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_E \frac{1}{r^2}\,r\,drd\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\int_1^{2}\frac{1}{r^2}\,r\,drd\theta$$

E のくだりは
なくてもよい

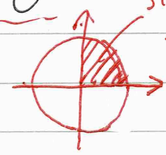
$$=\int_0^{\pi}\Big[\log r\Big]_1^2\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\log 2\,d\theta=\underline{\pi\log 2}\ /\!/$$

P140 例9 (1) $\iint_D x\,dxdy$, $D: \underbrace{x^2+y^2\leqq 1}_{r^2\leqq 1}$, $\underline{x\geqq 0,\ y\geqq 0}$

r は $0\leqq r$

$\sin\theta\geqq 0$
かつ $\cos\theta\geqq 0$



A.

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと、
(区域 D は $E=\{(r,\theta):\ 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\}$ に対応する。)

$$\iint_D x\,dxdy\left(=\iint_E r\cos\theta\ r\,drd\theta\right)$$

$$=\underline{\int_0^1 r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta}=\frac{1}{3}\cdot 1=\underline{\frac{1}{3}}\ /\!/$$

P136 系2

$\iint_I f(x,y)\,dxdy=\int_a^b g(x)\,dx\int_c^d h(y)\,dy$ を用いた
ちょっと考えればあたり前である。

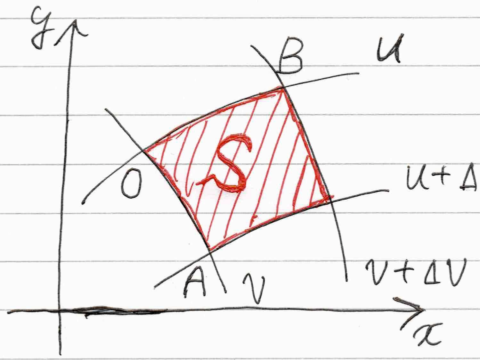
重積分の変数変換（一般の変数変換〜ヤコビアン〜）

。一般の変数変換．

平面極座標のときには $dxdy$ は $\underbrace{rdrd\theta}$（微小面積）となるが，他の場合はどうだろう．

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

x,yそれぞれをuとvの関数に変換する．

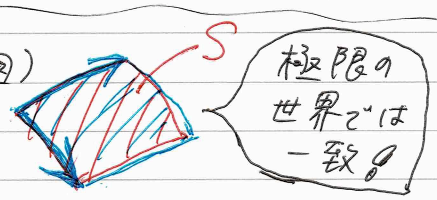


u,vが一定の曲線がx-yグラフ上で左のように描かれるとする．
O,A,Bを図のように定める．

$O(\varphi(u,v),\ \psi(u,v))$
$A(\varphi(u+\Delta u,v),\ \psi(u+\Delta u,v))$
$B(\varphi(u,v+\Delta v),\ \psi(u,v+\Delta v))$

- Oはuとvという場所のx,y座標だからこうなる。
- Aはuは$u+\Delta u$，vはvの場所にいるから，代入して，こうなる。
- BもAと同じようである．

Sをどうだすかだが，
ΔuとΔvが十分に小さいとき，
Sが $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が作る
平行四辺形の面積に近似できることを考える．（右図）



$$\overrightarrow{OA} \fallingdotseq \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u,\ \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\right) \cdots \boxed{1}$$

$$\overrightarrow{OB} \fallingdotseq \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\ \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)$$

$$S \fallingdotseq \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v \end{pmatrix}\right| \cdots \boxed{2}$$

$$= \underbrace{\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}\right|}_{\text{ヤコビアン} = J(u,v)} \underbrace{\Delta u \Delta v}_{(dudv)} \cdots \boxed{3}$$

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{OA}$は(Aの座標)−(Oの座標)で求められる。
Aの方をuでテイラー展開して，一次の項だけをかくと，
$\varphi(u+\Delta u,v) \simeq \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u$ となることを用いた。

$\boxed{2}$・平行四辺形の面積はベクトルの成分がつくる行列式に等しいことによる。
・det( )は行列式(determinant)を表す．
・面積だから絶対値をつけている。

$\boxed{3}$ 列に同じものが含まれているから，くくりだした．(多重線形性)

以上より，面積は単に$dudv$とならず，ヤコビアンという，おまけがかかることがわかる．
$(dxdy = |J(u,v)|\,dudv)$ ゆえに以下の式が成立する．

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E \underbrace{f(\varphi(u,v),\psi(u,v))}_{\text{uとvの関数で体積計算の高さに相当}} \underbrace{|J(u,v)|\,dudv}_{\text{微小面積}}}$$

前述のとおり，極座標への変換も可能

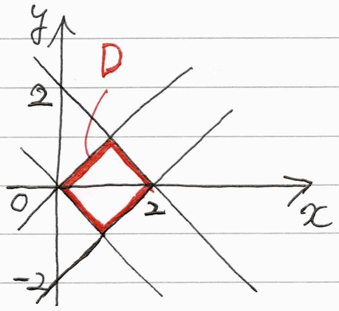
定理5.6 (P139)

ヤコビアンは微小面積の変化率を表しているとも言える．

DとEのことなど細かいことかいてある。
や条件

重積分の変数変換(例題で確認)

ex. $\iint_D (x-y)e^{x+y}dxdy$, $D=\{(x,y)\mid 0\leqq \underbrace{x+y}_{u}\leqq 2,\ 0\leqq \underbrace{x-y}_{v}\leqq 2\}$



Dを2つに分けて累次積分、でも求まるが変数変換した方が良い。

解) $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ として, これを x, y について解くと,

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(u+v) \\ y=\frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$ となる.

$$J(u,v)=\left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \qquad J_g=\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}=\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u$$

$$\therefore \iint_D (x-y)e^{x+y}dxdy=\int_0^2\int_0^2 ve^u\frac{1}{2}dudv \qquad (\because 0\leqq u\leqq 2, 0\leqq v\leqq 2)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2[ve^u]_0^2dv=\frac{1}{2}\int_0^2(ve^2-v)dv$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^2v^2-\frac{1}{2}v^2\right]_0^2=e^2-1 \;/\!/$$

おまけ「ヤコビアンは高校生の頃から見たことがあるはず」「置換積分の本質」をかこうと思ったが、もう1ページ必要になりそうなのでやめておく

変数変換 問5（解答のかき方は雑い）P142

（1）極座標に変換する．

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_E r^2\, r\,drd\theta$$

$2 \leqq r^2 \leqq 5$ より，

$$(与式) = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} r^3\,drd\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} d\theta = \frac{21}{2}\pi$$ //

θは限定されていないため，$[0,2\pi]$としたが$[-\pi,\pi]$や$[-\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi]$などでもよい．（1対1の話は割愛）

（2）

$$\iint_D (2x^2+3y^2)\,dxdy$$

$x = r\cos\theta + 1$
$y = r\sin\theta$ と置換すると，
この変換のヤコビアンはrとなるので
$dxdy \to rd\theta dr$ となる

$x^2+y^2 \leqq 2x$ に代入して，

$$r^2\cos^2\theta + 2r\cos\theta + 1 + r^2\sin^2\theta \leqq 2r\cos\theta + 2$$
$$r^2 \leqq 1$$

$0 \leqq r$ より　$0 \leqq r \leqq 1$

$y \geqq 0$ だから，$r\sin\theta \geqq 0$

$0 \leqq r \leqq 1$ より　$\sin\theta \geqq 0$

$\therefore 0 \leqq \theta \leqq \pi$

したがって，

$$(与式) = \int_0^{\pi}\int_0^1 \{2(r\cos\theta+1)^2 + 3(r\sin\theta)^2\} r\,drd\theta$$

$\int_0^1$に途中式不要

$$= \int_0^{\pi}\int_0^1 (2r^3\cos^2\theta + 4r^2\cos\theta + 2r + 3r^3\sin^2\theta)\,drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{4}{3}\cos\theta + 1\right)d\theta$$

$\frac{4}{3}\cos\theta$ → 明らかに0

$$= \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{8}\pi = \frac{13}{8}\pi$$ //

半角の公式より

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

（3）P141の例11より置換の仕方を決定する．

$x = r\cos^4\theta,\ y = r\sin^4\theta$ とおく．
変換のヤコビアンを考えると，

$$\begin{vmatrix} \cos^4\theta & -4r\cos^3\theta\sin\theta \\ \sin^4\theta & 4r\sin^3\theta\cos\theta \end{vmatrix} = 4r\sin^3\theta\cos^3\theta \times(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$= 4r\sin^3\theta\cos^3\theta$$

$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1 \to \sqrt{r} \leqq 1 \to 0 \leqq r \leqq 1$

$x \geqq 0,\ y \geqq 0 \to 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$

$$\iint_D y\,dxdy = 4\int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^3\theta\,d\theta$$

$\cos^3\theta = \cos^2\theta\cdot\cos\theta$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7\theta\cos\theta - \sin^9\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}\sin^8\theta - \frac{1}{10}\sin^{10}\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) = \frac{10}{3}$$ //

$\sin^7\theta\cos^3\theta$は一見，「こんなん積分できんやろ」と思うかもしれないが，微分したものがかかるように変形するのがポイントである。

置換しないとき．（もしかしたらこっちのがラク？）

$0 \leqq x \leqq (1-\sqrt{y})^2 \quad 0 \leqq y \leqq 1$

$$(与式) = \int_0^1\int_0^{(1-\sqrt{y})^2} y\,dxdy$$

$$= \int_0^1 [xy]_0^{(1-\sqrt{y})^2} dy$$

$$= \int_0^1 (y - 2y\sqrt{y} + y^2)\,dy$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$$ //

$y\sqrt{y} = y^{\frac{3}{2}}$

置換では$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$から，$r$と$\theta$の範囲がきれいになるように$x = r\cos^4\theta$，$y = r\sin^4\theta$となっている．

P142 問5

(4) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおく
$dxdy \to r\,dr\,d\theta$

$$0 \leqq (x^2+y^2)^2 \leqq x^2 - y^2$$
$$0 \leqq (r^2)^2 \leqq r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$0 \leqq r^2 \leqq \cos 2\theta \cdots ①$$
$$0 \leqq r \leqq \sqrt{\cos 2\theta} \quad \because r, \cos 2\theta \geqq 0$$

$x \geqq 0$ より $\cos\theta \geqq 0 \cdots ②$

①より $0 \leqq \cos 2\theta$
$$-\frac{\pi}{2} \leqq 2\theta \leqq \frac{\pi}{2} \cdots ①'$$

①', ②より $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$

$$(与式) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{1}{(1+r^2)^2} r\,dr\,d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{1+r^2}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\cos 2\theta} - 1\right) d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\left[\frac{1}{2}\tan\theta - \theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$ ← ∫の公式使った　奇

$$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$ //

$2\cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta$ より
$$\int \frac{1}{1+2\cos\theta} d\theta = \int \frac{1}{2\cos^2\theta} d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{2}\tan\theta + C$$

教科書解答にのっている(図4.15参照)は(図5−15)のまちがいだと思われる.

(5)
$$\sqrt{ay} \leqq x \leqq \sqrt{by}$$) 2乗したい
$$ay \leqq x^2 \leqq by$$) yで割りたい
$$a \leqq \frac{x^2}{y} \leqq b$$) $0<a<b$
$$\log a \leqq \log\frac{x^2}{y} \leqq \log b$$

$= u$ とおく.　$v = \log\dfrac{y^2}{x}$

$$2u + v = \log\frac{x^4}{y^2} + \log\frac{y^2}{x}$$
$$= \log x^3$$
$$\log x = \frac{1}{3}(2u+v)$$
$$x = e^{\frac{1}{3}(2u+v)},\quad y = e^{\frac{1}{3}(u+2v)}$$ ①

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\exp\{\frac{1}{3}(2u+v)\} & \frac{1}{3}\exp\{\frac{1}{3}(2u+v)\} \\ \frac{1}{3}\exp\{\frac{1}{3}(u+2v)\} & \frac{2}{3}\exp\{\frac{1}{3}(u+2v)\} \end{vmatrix}$$
$\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}(u+2v)}$
$$= \frac{1}{3}e^{u+v}$$ ← ヤコビアン

$$\iint_D x\,dxdy = \frac{1}{3}\int_{\log c}^{\log d}\int_{\log a}^{\log b} e^{\frac{5}{3}u + \frac{4}{3}v} du\,dv$$ ∵①
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\int_{\log c}^{\log d}\left(e^{\frac{5}{3}\log b + \frac{4}{3}v} - e^{\frac{5}{3}\log a + \frac{4}{3}v}\right)dv$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\left\{\left(e^{\frac{5}{3}\log b + \frac{4}{3}\log d} - e^{\frac{5}{3}\log b + \frac{4}{3}\log c}\right) - \left(e^{\frac{5}{3}\log a + \frac{4}{3}\log d} - e^{\frac{5}{3}\log a + \frac{4}{3}\log c}\right)\right\}$$
$$= \frac{3}{20}\left\{\left(b^{\circ}d^{\circ} - b^{\circ}c^{\circ}\right) - \left(a^{\circ}d^{\circ} - a^{\circ}c^{\circ}\right)\right\}$$
$$= \frac{3}{20}\left(b^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{5}{3}}\right)\left(d^{\frac{4}{3}} - c^{\frac{4}{3}}\right)$$ //

定理5.6 注意について
これは,例えば極座標で $r=0$ のとき, θ の値によらず $x=y=0$ となり,対応は1対1ではないが,このような (r,θ) の集合の面積は0だから,変数変換の公式が使えるということである.

logはつけなくても解けるが,少し計算がめんどうになる.

練習問題

1 (a)

$$(\text{与式}) = \int_1^{\log 2} ye^y - e^y \, dy$$

$$= [ye^y]_1^{\log 2} - [e^y]_1^{\log 2} \cdot 2$$

$$= 2\log 2 - e - (2-e)\cdot 2$$

$$= e + 2\log 2 - 4$$

2 (a)

$$(\text{与式}) = \int_2^3 \int_1^3 (x+y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_2^3 \left[\frac{1}{2}x^2 + y^2 x\right]_1^3 dy$$

意外と"x"忘れがち

$$= \int_2^3 4 + 2y^2 \, dy$$

$\frac{1}{2}(3^2-1^2)$のように計算!!

$$= 4 + \frac{2}{3}\cdot(27-8) = \frac{50}{3}$$

(b) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ $\quad 0 \leqq r \leqq 1$

$$(\text{与式}) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \, r\, dr\, d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(c) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ $\quad 1 \leqq r \leqq 2$

ここで、$\left\{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\right\}' = \frac{1}{2}\cdot 2r(1+r^2)^{-\frac{1}{2}} = r(1+r^2)^{-\frac{1}{2}}$

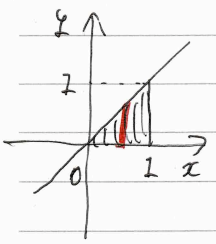
$$\therefore (\text{与式}) = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 d\theta$$

$$= 2\pi(\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

3 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ より $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (\text{if } x > 0) \\ 1 & (\text{if } x = 0) \end{cases}$

と定義すればDで連続で順序変更可能。



$$\int_0^1 dx \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy$$

$\frac{\sin x}{x}\cdot x$

$$= \int_0^1 \sin x \, dx$$

$[-\cos x]_0^1$

$$= 1 - \cos 1$$

問などもいくらか省いたが、もしといた場合は見せてほしい(切実)

前半(終)