微積 極限値と連続について（2変数関数）

定義域Dをもつ関数$f(P)$がD内の点Aで連続であるとは

$$\lim_{P \to A} f(P) = f(A)$$

が成立することである。
ゆえに極限値の存在の有無を示せることが大切となる。

極限値があるかどうかを示すには主に以下の3通りの方法がある。

① 極座標表示 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を用いる。
② xとyに関係をもたせる（$y = mx$などとおく）
③ $x \to 0$後に$y \to 0$をした値と、$y \to 0$後に$x \to 0$をした値をくらべる。

以下に少し詳しく解説する。（理論的なことより使い方を示す）

① A 極限値が存在することを示す場合。 ※例を用いて説明する。（P.59）

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$ を示す。

i) $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ を代入（絶対値をとってから）

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{r^3(\cos^2\theta\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \right| = |r\cos^2\theta\sin\theta| \leqq r$$

$0 \leqq |\cos\theta|,\ |\sin\theta| \leqq 1$ より
$0 \leqq |\cos^2\theta\sin\theta| \leqq 1$

ゆえに

$$0 \leqq \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \leqq \underset{0}{r}$$ となるが、ここで、

ii) $(x, y) \to (0, 0)$ とすれば $r \to 0$ となるため

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$ が示された。

この方法は少し考えればすぐわかることだが、
特に（分子の次数）＞（分母の次数）となる場合に、有効である。

以上の流れを用いる方法である。

① B 極限値が存在しないことを示す場合

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ は存在しないことを示す

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を代入（絶対値はとってもよいが、必要性はない）

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$$

右辺の値は点 $P(x,y)$ の原点への近づき方により異なる値をとる（1つに定まらず θ に依存している）ことを示す。よって極限値は存在しない。

極座標表示にしたのち、極限が θ のみに依存することを示す方法である。

② $y=mx$, $y=mx^2$ などとおきかえる方法である。

$y=mx$ とおくときは y 軸を除く $360°$ の方向から直線的に原点に近づくことを表している。しかしこのような限定的な状況を用いているため、主に極限値が存在しないことを示すのに使われる方法である。

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}$ は存在しないことを示す。

$y=mx$ (m: 実数) とすると、

かき方

m: 実数 $= m\in R$

R: 実数全体の集合

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{1}{1+m^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{1+m^2}=\frac{1}{1+m^2}$$

右辺は点 $P(x,y)$ が原点を通るいろいろな直線に沿って原点に近づくとき、その近づき方により異なる値をとる（m の値に依存）ことを示す。

ゆえに極限値は存在しない。

y の次数が全て x の次数の2倍になっていたら $y=mx$ でなくちがうようにおきかえるなどの工夫がいることもある。

③ $y\to 0$ 後に $x\to 0$ をとった値と、$x\to 0$ 後に $y\to 0$ をとった値が異なれば極限値が存在しないことを利用する方法である.(P.60)
(異なる近づけ方をすると値が1つに定まらない)
※しかし注意が必要なのは、2つの値が等しければ極限値が存在するとは言えない(必要条件だが十分条件でない)ことである.
存在することを示すにはさらに距離などを考える方法があるが、好きでないため、省略し、存在しないことを示す方法とする.

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}$ は存在しないことを示す.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=1,\quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=0$$

ゆえに存在しない //

以上のことを用いて3章練習問題をとく. P84〜

[A] 1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$

が原点$(0,0)$で連続かどうかを論ぜよ.

分母の x,y の次数がそろっていないため、①でなく②でまず考えてみる.
分子分母とも y の次数は x の次数の2倍であるため、
($y=mx$ でなく) $x=my^2$ とする. $(m\in R)$
$x=my^2$ とすると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\frac{my^4}{m^2y^4+y^4}=\lim_{x,y\to 0}\frac{m}{m^2+1}=\frac{m}{m^2+1}$$

これは m の関数であり定数でない(0にならない)
ゆえに極限値が存在しない

連続でない //

[A] 2. 極限値が存在するか否か. 理由も述べよ.

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

③ 　　　　　　　　　　　気分的に③を用いる.

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=1$, $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=-1$

存在しない.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y}{y^2+2x}$

③

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\bigcirc\right)=\infty$, $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\bigcirc\right)=0$

存在しない.

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}$

①

極座標表示を用いると

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x}=\lim_{r\to 0}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\tan\theta$

値は1つに定まらず θ に依存. 存在しない

(d) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$

$=\frac{\sin(1-1)}{\cos(1-1)}=\frac{0}{1}=0$ 　　　　0 //

(e) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$

$=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\cancel{x-y}}{(x+y)\cancel{(x-y)}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ 　　　　$\frac{1}{2}$ //

(d)(e)について 2変数だとしても不定形とならなければ
代入するだけ!

記述方法
$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x$
$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z_{xx}$
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z_{xy}$

偏導関数を求めるには偏微分すればよい。

3. 1階の偏導関数を求めよ.　$f_{xy} = f_{yx}$ (C^2級)

(a) $\sin(x^2+y^2)$

$f_x = 2x\cos(x^2+y^2)$ ← x以外定数とみて微分
$f_y = 2y\cos(x^2+y^2)$ //

(b) $\sin^{-1}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$ ※ であることを利用する.

$$f_x = \frac{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)' \cdots A}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2} \cdots B}$$

$$= \underbrace{\frac{2x\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}}_{A} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}}}}_{B}$$

$$= \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot \sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2}{4x^2y^2}} \quad (x^2+y^2 \neq 0,\ xy \neq 0) \rightarrow \frac{x^2+y^2}{|2xy|}$$

ゆえに $f_x = \frac{\pm 2y}{x^2+y^2}$ (上段(+)は $xy>0$, 下段(−)は $xy<0$ のとき)

$$f_y = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\quad)^2}} \qquad \therefore f_y = \frac{\mp 2x}{x^2+y^2}$$

(c) $\log(1+x^2+y^3)$

$f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^3}$, $f_y = \frac{3y^2}{1+x^2+y^3}$

(d) $e^{\sqrt{x^2+y}}$

$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y}}e^{\sqrt{x^2+2y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}e^{\sqrt{x^2+y}}$　$f_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}e^{\sqrt{x^2+y}}$

※ $y=\sin^{-1}x$ の必要十分条件は $x=\sin y$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$

$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ ∵ yの範囲内で $\cos y \geqq 0$

$-1<x<1$ のとき $\sqrt{1-x^2} \neq 0$ であるから, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ヤコビアンは重積分などで重要となるもので，それは，

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{vmatrix} = f_x(x,y)\,g_y(x,y) - f_y(x,y)\,g_x(x,y)$$

である。

4. ヤコビアンを計算せよ。

$f(x,y)$　　　$g(x,y)$

(a) $\phi(u,v) = u^p v^q$, $\psi(u,v) = u^q v^p$ （ただし $p+q=1$）

$f_x(x+y)\cdot g_y(x,y) - f_y(x,y)\cdot g_x(x,y)$

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)} = pu^{p-1}v^q \cdot pu^q v^{p-1} - qu^p v^{q-1}\cdot qu^{q-1}v^p$$

$$= p^2 u^{q(p-1)} v^{q(p-1)} - q^2 u^{p(q-1)} v^{p(q-1)}$$

ここで $p-1=-q$, $q-1=-p$ であるから，

$$(\text{右辺}) = p^2 u^0 v^0 - q^2 u^0 v^0$$

$$= p^2 - q^2 \;//$$

(b) $\phi(u,v) = u\cos^n v$, $\psi(u,v) = u\sin^n v$ （n：自然数）

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)} = \cos^n v \cdot u n \sin^{n-1} v\cdot\cos v - un\cos^{n-1} v\cdot(-\sin v)\cdot\sin^n v$$

$$= un\left(\sin^{n-1} v\cdot\cos^{n+1} v + \cos^{n-1} v\,\sin^{n+1} v\right)$$

$$= un\sin^{n-1} v\cos^{n-1} v\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)$$

$$= un(\sin v\cos v)^{n-1} \;//$$

(c) $\phi(u,v) = \log(u\log v)$, $\psi(u,v) = v\log(\log u)$

vがこっちなことにちゅうい

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)} = \frac{\cancel{\log v}}{u\cancel{\log v}}\cdot\log(\log u) - \frac{1}{\cancel{u}\log v}\cdot\frac{\cancel{u}}{\cancel{v}}\cdot\frac{v}{\log u}\cdot\frac{1}{u}$$

$$= \frac{1}{u}\left(\log(\log u) - \frac{1}{\log u\,\log v}\right) \;//$$

4 (d) $\phi(u,v)=\cosh u\cos v$, $\psi(u,v)=\sinh u\sin v$

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}=\sinh u\cos v\cdot\sinh u\cos v-\cosh u(-\sin v)\cdot\cosh u\sin v$$
$$=\sinh^2 u\cos^2 v+\cosh^2 u\sin^2 v$$

$\sinh^2 u$ 2を付ける位置かくにん!

$$\boxed{\begin{aligned}(\sinh x)'&=\cosh x\\(\cosh x)'&=\sinh x\end{aligned}}$$
P30

(e) $\phi(u,v)=\sin^{-1}\frac{v}{u}$ uこっち! $\psi(u,v)=\cos^{-1}\frac{u}{v}$ uこっち!

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{u}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{v}{u^2}\right)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{v}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{u}\right)^2}}\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{v}\right)^2}}\cdot\frac{1}{v}$$
$$=0$$

導出は容易である

$$\boxed{(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1),\quad(\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)}$$
P34

5. 偏微分方程式を満たすことを示せ.

(a) $z=f(ax+by)$ $\quad b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$

$$b\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=f'(ax+by)\cdot ab\ ,\quad a\frac{\partial z}{\partial y}=f'(ax+by)\cdot b\cdot a$$
$\frac{\partial t}{\partial x}$

ゆえに(左辺)=(右辺)

$\left(f'(ax+by)=\frac{\partial z}{\partial t}\ (t=ax+by)\right)$

(b) $z=f(x+at)+f(x-at)$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=f'(x+at)\cdot a+f'(x-at)\cdot(-a)$$
$$(左辺)=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2f''(x+at)+a^2f''(x-at)=a^2\left(f''(x+at)+f''(x-at)\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x+at)+f'(x-at)$$
$$(右辺)=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\left(f''(x+at)+f''(x-at)\right)$$

∴(左辺)=(右辺)
示された

5. (c) $z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$　　$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$

$$(左辺) = x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x\left\{nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right\} + y\left\{x^n f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right\}$$

$$= nx^n f\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot y + x^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot y$$

$$= nx^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= nz = (右辺)$$

ゆえに示された。

(d) $z = f(xy)$　　$x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$

$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = f'(xy)\cdot y\cdot x$　　$y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = f'(xy)\cdot x\cdot y$　　成立。

(e) $y - az = f(x - bz)$　　$b\frac{\partial z}{\partial x} + a\frac{\partial z}{\partial y} = 1$

xでへんびぶん

$$-a\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x-bz)\cdot\left(1 - b\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(x-bz)}{f'(x-bz)\cdot b - a}$$

yについて偏微分

$$1 - a\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x-bz)\cdot\left(-b\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a - f'(x-bz)\cdot b}$$

$$b\frac{\partial z}{\partial x} + a\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'(x-bz)\cdot b - a}{f'(x-bz)\cdot b - a} = 1$$

示された。

6. 与式と偏微分した式からa, bを消去して偏微分方程式をつくれ.

(a) $z = ax + by$ …Ⓐ

$\frac{\partial z}{\partial x} = a$　　$\frac{\partial z}{\partial y} = b$

これらをⒶに代入して

$$z = xz_x + yz_y$$

6.(b) $z^2=(x-a)^2+(y-b)^2$

$2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=2(x-a)$ $\qquad$ $2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=2(y-b)$

$\Leftrightarrow (x-a)=z\dfrac{\partial z}{\partial x}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow (y-b)=z\dfrac{\partial z}{\partial y}$

これらの式を代入して

$z^2= z^2z_x{}^2+z^2z_y{}^2 \qquad \therefore z_x{}^2+z_y{}^2=1$ //

微分方程式 $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

を満たす関数を調和関数と呼ぶ

7. 調和関数であることを示せ

ここで、極座標で、

$$\boxed{\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}}$$

が成立することを利用する。(教 P.70, 71)

(a) $z=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{r\cos\theta}{r^2}=\dfrac{\cos\theta}{r}$

$\dfrac{\partial z}{\partial r}=-\dfrac{\cos\theta}{r^2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}=-\dfrac{\sin\theta}{r}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\dfrac{2\cos\theta}{r^3}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=\dfrac{-\cos\theta}{r}$

$$\Delta z=\frac{2\cos\theta}{r^3}+\frac{1}{r}\cdot\left(-\frac{\cos\theta}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\cos\theta}{r}\right)=0$$

(b) $z=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$=\tan^{-1}(\tan\theta)$ $\quad (\because -\frac{\pi}{2}<z<\frac{\pi}{2})$

$=\theta$

$\Delta z=0+0+0=0$

7 (c) $z = e^{ax}(\cos ay + \sin ay)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = a e^{ax}(\cos ay + \sin ay)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 e^{ax}(\cos ay + \sin ay)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{ax}\{a\cdot(-\sin ay) + a\cos ay\}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -a^2 e^{ax}(\cos ay + \sin ay)$

$\therefore \Delta z = 0$

(d) $z = e^x(x\cos y - y\sin y) = e^x x\cos y - e^x y\sin y$

$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x(1+x)\cos y - e^x y\sin y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x(2+x)\cos y - e^x y\sin y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^x x\sin y - e^x(\sin y + y\cos y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x x\cos y - e^x(\cos y + \cos y - y\sin y)$

$= -e^x(2+x)\cos y + e^x y\sin y \qquad \therefore \Delta z = 0$ //

(e) $z = \sin x \sinh y$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sinh y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sinh y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin x \sinh y \qquad \Delta z = 0$ /

陰関数.

2つの変数 x, y が方程式 $F(x, y)=0$ を満たすとき, y を $F(x, y)=0$ の定める陰関数という.
対し, $y=f(x)$ は陽関数という.

陰関数極値問題について. P.75

この問題で極値をとる候補点 (a, b) は以下の i) ii) iii) を満たす.

☆

i) $f(x, y)=0$
ii) $f_x(x, y)=0$
iii) $f_y(x, y) \neq 0$

$y=\psi(x)$ の極値を求める

i) ii) iii) の解 (a, b) について
$\phi(a,b)>0 \Rightarrow y=\psi(x)$ は $x=a$ で極小値 $y=b$
$\phi(a,b)<0 \Rightarrow y=\psi(x)$ は $x=a$ で極大値 $y=b$

$\phi(x, y)$ を次式で定義

$$\psi''(x)=\phi(x, y)=-\frac{f_{xx}(x, y)}{f_y(x, y)}$$

注) $\phi(a,b)=0$ のときはこの方法では判定できない

proof) $f(a,b)$ を満たす点 (a,b) が $f_x(a,b) \neq 0$ を満たすと仮定
陰関数定理より点 (a,b) 付近で y は x の関数 $y=\psi(x)$ と考えられ

$$\psi'(x)=-\frac{f_x(x, \psi(x))}{f_y(x, \psi(x))}$$

が成立. P75 (数)

$x=a$ で $y=\psi(a)=b$ より

$$\psi'(a)=-\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

よって点 (a,b) が候補点なら $\psi'(a)=0$ すなわち $f_x(a,b)$ を満たす.
連鎖律と $f_{xy}=f_{yx}$ より.

$$\psi''(x)=-\frac{(f_{xx}x'+f_{xy}\psi'(x))f_y-f_x(f_{yx}x'+f_{yy}\psi'(x))}{f_y^2}$$

$$=-\frac{f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

が成立.

ここで, $f_x(a,b)=0$ より

$$\psi''(a)=-\frac{f_{xx}(a, b)}{f_y(a, b)}$$

を得る.

したがって ☆ が成立する.

練習8 陰関数 y の極値を求めよ.

(a) $2xy^3 + y - x^2 = 0$

$f = 2xy^3 + y - x^2$ とおく.

$f_x = 2y^3 - 2x$, $f_y = 6xy^2 + 1$ より極値を満たす候補点は

$$\begin{cases} \text{i)}\ 2xy^3 + y - x^2 = 0 \\ \text{ii)}\ 2(y^3 - x) = 0 \\ \text{iii)}\ 6xy^2 + 1 \neq 0 \end{cases}$$ を満たす

ii)より $y = \sqrt[3]{x}$ であり, i)に代入すると, $x^2 + \sqrt[3]{x} = 0$

これより $(x, y) = (0, 0), (-1, -1)$ を得る. ← $x = 0, -1$ を i)に代入

この点は iii)を満たし, 候補点は $(0,0)$, $(-1,-1)$.

次に $f_{xx} = -2$, $f_y = 6xy^2 + 1$ より,

$$\phi = -\frac{f_{xx}}{f_y} = +\frac{2}{6xy^2 + 1}$$

ここで $\phi(0,0) = 2 > 0$ より $x = 0$ で極小値 0 をとる

$\phi(-1,-1) = -\frac{2}{5} < 0$ より $x = -1$ で極大値 -1 をとる. //

(b) $x^3 + 3x^2 + y^3 - 2y = 0$

$f = x^3 + 3x^2 + y^3 - 2y$ とおく. (a)と同様に考える.

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + y^3 - 2y = 0 & \cdots① \\ 3x^2 + 6x = 0 \iff 3x(x+2) = 0 & \cdots② \\ 3y^2 - 2 \neq 0 & \cdots③ \end{cases}$$

②より $x = 0, -2$ で, ①に代入して $(x, y) = (0, \pm\sqrt{2}), (-2, -2)$ を得る.

これは③を満たす.

$f_{xx} = 6x + 6 = 6(x+1)$, $f_y = 3y^2 - 2$ より,

$$\phi = -\frac{f_{xx}}{f_y} = -\frac{6(x+1)}{3y^2 - 2}$$

$\phi(0, \pm\sqrt{2}) = -\frac{6}{4} < 0$ より $x = 0$ で極大値 $\pm\sqrt{2}$ をとる.

$\phi(-2, -2) = \frac{6}{10} > 0$ より $x = -2$ で極小値 -2 をとる.

関数の極値

関数 $f(x,y)$ が C^2 級（2回連続微分可能）であって、

$$f_x(a,b)=0$$
$$f_y(a,b)=0$$ を満たしているとする。

$$f_{xx}(a,b)=A,\quad f_{xy}(a,b)=H,\quad f_{yy}(a,b)=B$$
$$D=H^2-AB$$ とおく。このとき、

(i) $D<0$ かつ $A>0$ ならば $f(a,b)$ は極小値
(ii) $D<0$ かつ $A<0$ ならば $f(a,b)$ は極大値.　　Dが判別式!
(iii) $D>0$ ならば $f(a,b)$ は極値でない

9. 極値を求めよ.

(a) $\underbrace{z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)}_{}$ ―fとする　$(0\leqq x,\ y\leqq 2\pi)$

① まず $f_x=0$, $f_y=0$ から解を出す。

$$f_x(x,y)=\cos x+\cos(x+y)=0 \quad \cdots Ⓐ$$
$$f_y(x,y)=\cos y+\cos(x+y)=0 \quad \cdots Ⓑ$$

Ⓐ, Ⓑ より $\cos x=\cos y$

$\therefore x=y,\ 2\pi-y$

Ⓐ に $x=2\pi-y$ を代入すると、

$$\cos x+\cos 2\pi=0$$
$$x=\pi \quad このとき\ y=\pi$$

Ⓐ に $x=y$ を代入　　　和積を使う方法などもある。

$$\cos y+\cos 2y=0$$
はいかく ↓
$$2\cos^2 y+\cos y-1=0$$
$$\cos y=-1,\ \frac{1}{2}$$
$$y=\pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

ゆえに $0\leqq x,y\leqq 2\pi$ で $(x,y)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right),(\pi,\pi),\left(\frac{5}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\right)$ が極値候補

② A, H, B を出し D を考える。

$A=f_{xx}=-\sin x-\sin(x+y)$　$H=f_{xy}(x,y)=-\sin(x+y)$　$B=f_{yy}=-\sin y-\sin(x+y)$

$$D(x,y)=H^2-AB=\sin^2(x+y)-(\sin x+\sin(x+y))(\sin y+\sin(x+y))$$
$$=-\{\sin x\sin y+(\sin x+\sin y)\sin(x+y)\}$$

$D\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{9}{4}<0$

$f_{xx}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$　　点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ で極大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$D(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi) = -\frac{9}{4} < 0$
$f_{xx}(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi) = \sqrt{3} > 0$ 点$(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi)$で極小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$D(\pi, \pi) = 0$
$x = \pi + s$, $y = \pi + t$ とおいて調べてみる.
$s = t = 0$ の近くで 点(π, π)における展開は

$f = -\sin s - \sin t + \sin(s+t)$
$= -(\frac{1}{6}(s - s^3) + \cdots\cdots) - ((t - t^3)\cdot\frac{1}{6} + \cdots\cdots) + (s+t) - \frac{1}{6}(s+t^3) - \cdots\cdots$
$= -\frac{1}{2}st(s+t) + \cdots\cdots$
となり、極値ではない.

D=0となってしまったらなんとかして極値かどうか調べなければならない。
テストにでないことを祈る.
(先の方法では判別不可)

9 (b) $z = e^{-ax^2 - by^2}$ $(a, b > 0)$

$z_x = -2ax \cdot e^{-ax^2-by^2} = 0$
$z_y = -2by \cdot e^{-ax^2-by^2} = 0$ 　○ : $-ax^2 - by^2$
$-2ax = -2by = 0$ より $x = y = 0$
$z_{xx} = -2ae^{○} + 4a^2x^2e^{○}$ 　$z_{xy} = 4abxye^{○}$
$z_{yy} = -2be^{○} + 4b^2y^2e^{○}$
$D(0,0) = -4ab < 0$
$z_{xx}(0,0) = 4a^2 > 0$ 　点$(0,0)$で極小値 1

(c) $z = x^3 + 3(y^2 - 2y)x$

$z_x = 3x^2 + 3(y^2 - 2y) = 0$
$z_y = 6x(y - 1) = 0 \Longrightarrow y = 1, x = 0$
$(x, y) = (\pm 1, 1), (0, 0), (0, 2)$
$z_{xx} = 6x$ 　$z_{xy} = 6y - 6$ 　$z_{yy} = 6x$
$D(x, y) = 36(y^2 - 2y - x^2 + 1)$
$D(0,0), D(0,2) > 0$ 　$D(\pm 1, 1) < 0$
$z_{xx}(1,1) = 6 > 0$ 　$z_{xx}(-1,1) = -6 < 0$

点$(-1,1)$で極大値 2, $(1,1)$で極小値 -2 //

9.(d) $z = x\log x + y\log y + (1-x-y)\log(1-x-y)$

$$z_x = \log x + 1 + (-1)\cdot\log(1-x-y) + (1-x-y)\cdot\frac{1}{1-x-y}\cdot(-1)$$
$$= \log x - \log(1-x-y) = 0$$
$$z_y = \log y - \log(1-x-y) = 0$$
$$\therefore \log\frac{x}{y} = 0 \quad x = y$$
$$\log x - \log(1-x-x) = 0$$
$$\log\frac{x}{1-2x} = 0$$
$$\left|\frac{x}{1-2x}\right| = 1$$
$$\therefore x = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{3}$$

$z_{xx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x-y}$ $z_{xy} = \frac{1}{1-x-y}$ $z_{yy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-x-y}$

$z_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ $z_{xy}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ $z_{yy}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$

$D(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} < 0$

$z_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} > 0$ 点$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$で極小値 $\log\frac{1}{3} = -\log 3$ //

マクローリン展開

No.19に、より具体的に示した式を記述した。(一般の式も) ーアワ4

1変数のとき $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots$

2変数のとき

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0) + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\ (0,0)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\ (0,0) + R_{n+1}$$

$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$などを計算するのであって、「$f(0,0)=0$だから全部0じゃん!」というのはまちがい。

10. マクローリン展開 (3次まで)

(a) $\sin(x+y)$

2変数のときで考えてもいいが、$x+y=X$とおくと、

$\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + O(X^5)$ であるから、$X = x+y$と戻すと、

解である $x + y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3$ // がえられる。

10(b) $e^{x+y}\log(1+y)=f(x,y)$　　$f_y=e^{x+y}\log(1+y)+\dfrac{e^{x+y}}{1+y}$

今回 $f=f_x$ だから、
$f_x=f_{xx}$
$=f_{xxx}$
$=0$
※(0,0)において

$f_x(0,0)=0$　　$f_y(0,0)=1$　　$f_{xy}(0,0)=1$
$f_{xx}(0,0)=0$　　$f_{yy}(0,0)=1$　　$f_{xxy}(0,0)=1$
$f_{xxx}(0,0)=0$　　$f_{yyy}(0,0)=2$　　$f_{xyy}(0,0)=1$

今回 $f=f_x$ だから、
$f_{xy}=f_y=1$ ※(0,0)
$f_{xxy}=f_{xy}=f_y=1$
$f_{xyy}=f_{yy}=1$

$f_{yyy}(x,y)=e^{x+y}\log(1+y)+\dfrac{e^{x+y}}{1+y}+\dfrac{y}{(1+y)^2}+\dfrac{1-y^2}{((1+y)^2)^2}\xrightarrow[(y\to 0)]{}2$

$$f(x,y)=0+(0+y)+\frac{1}{2}(0+2xy+y^2)+\frac{1}{6}(0+3x^2y+3xy^2+2y^3)$$
$$=y+xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3$$

正数では答が x になっているが教科書がまちがっている。(確認済)

※ $x^2 f_{xx}(0,0)+2xy\,f_{xy}(0,0)+y^2 f_{yy}(0,0)$

(c) $\sinh(x-y)$

(a)と同様に $x-y=X$ としてみると、

$\sinh X = X+\dfrac{1}{3!}X^3+O(X^5)$ であるから、$X=x-y$ と戻すと、

$$x-y+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{6}y^3$$

条件付き極値問題の扱い方（教にならったとき方）

関数 $f(x,y)$, $F(x,y)$ が C^2 級（2回連続微分可能）で

$$F(a,b)=0$$
$$f_x(a,b)-\lambda F_x(x,y)=G_x(x,y)=0$$
$$f_y(a,b)-\lambda F_y(x,y)=G_y(x,y)=0$$

を満たし、$F_x(a,b)$ と $F_y(a,b)$ のいずれかが0でないとする。このとき

$A=f_{xx}(a,b)-\lambda F_{xx}(x,y)$
$H=f_{xy}(a,b)-\lambda F_{xy}(x,y)$
$B=f_{yy}(a,b)-\lambda F_{yy}(a,b)$
$D=AF_y(a,b)^2-2HF_x(a,b)F_y(a,b)+BF_x(a,b)^2$
$=G_{xx}(x,y)F_y(x,y)^2-2G_{xy}(x,y)F_x(x,y)F_y(x,y)+G_{yy}(x,y)F_x(x,y)^2$

とおくと、

(x,y) が $F(x,y)=0$ を動くとき

(i) $D<0$ のとき $f(x,y)$ は点 (a,b) で極大値をとる。
(ii) $D>0$ のとき $f(x,y)$ は点 (a,b) で極小値をとる。

P81-2

今回は練習問題11のかわりに問14(1)を用いて具体的な解法を示す.

問14 例8にならって条件付き極値問題をとけ.
実はつかわない方がかんたんにとけたり(笑)

(1) 点(x,y)が$xy=1$上を動くとき. x^2+4y^2
$F(x,y)=xy-1$　　$f(x,y)$

解 $G(x,y)=x^2+4y^2-\lambda(xy-1)$とおく. $\Leftarrow G(x,y)=f(x,y)-\lambda F(x,y)$
連立方程式

$$\begin{cases} G_x(x,y)=2x-\lambda y=0 \cdots ① \\ G_y(x,y)=8y-\lambda x=0 \end{cases}$$

まず候補点を探す.

からyを消去すると

$$16x-\lambda^2 x=0$$

$x(\lambda+4)(\lambda-4)=0$ となるので $x=0$ または $\lambda=\pm4$ だが,
$x=0$は$xy=1$を満たさず不適. ①にλの値を代入.

i) $\lambda=4$のとき $2x-4y=0$ $\therefore x=2y$
$x=2y$を$xy=1$に代入して, $2y^2=1$そこから,
$(x,y)=\left(\pm\sqrt{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順)が得られる.

ii) $\lambda=-4$のとき,
$2x+4y=0$ $\therefore x=-2y$
$x=-2y$を$xy=1$に代入して $-2y^2=1$
ゆえにyは実数解をもたず不適

ゆえに極値となる候補点は$\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$である.
$G_{xx}=2$ $G_{xy}=-\lambda$ $G_{yy}=8$ $F_x=y$ $F_y=x$ より,

$$D(x,y)=G_{xx}(x,y)F_y(x,y)^2-2G_{xy}(x,y)F_x(x,y)F_y(x,y)+G_{yy}(x,y)F_x(x,y)^2$$
$$=2x^2+2\lambda xy+8y^2=2(x^2+\lambda xy+4y^2)$$

Dの正負かくにん!

$$D\left(\sqrt{2},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=D\left(-\sqrt{2},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\cdot(2+\lambda+2)$$
$$=2\cdot(2+4+2)>0 \quad (\because \lambda=4)$$

ゆえに$\left(\pm\sqrt{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$で極小値$(\pm\sqrt{2})^2+4\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=4$をとる.
また,
$x^2, y^2 \geqq 0$より $x^2+4y^2 \geqq 4$であるから,
極小値が最小値となる. //

12. 導関数を求めよ.

(a) $z=x^2+y^2$ $x=t-\cos t$, $y=1-\sin t$ のとき, $\dfrac{dz}{dt}$

$$z=t^2-2t\cos t+\cos^2 t+1-2\sin t+\sin^2 t$$ x, yの代入

$$= t^2-2t\cos t-2\sin t+2$$

$$\frac{dz}{dt}=2t-2(\cos t-t\sin t)-2\cos t$$

$$=2(t-2\cos t+t\sin t)$$

(b) $z=f(x,y)$, $y=\varphi(x)$ のとき, $\dfrac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

(c) $x^2+\underline{xy}+3y^2=1$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

積の微分

$$2x+y+x\frac{dy}{dx}+6y\frac{dy}{dx}=1 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+6y}$$

$\dfrac{dy}{dx}=y'$ とおく.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-(2+y')(x+6y)-(-2x-y)(1+6y')}{(x+6y)^2}$$

$$=\frac{1}{(x+6y)^2}\left\{\frac{11y}{x+6y}\cdot(x+6y)\cdot(-1)+(2x+y)\cdot\frac{-11x}{x+6y}\right\}$$

$$=-\frac{1}{(x+6y)^3}\cdot\left\{-(11xy+66y^2+(-22x^2-11xy)\right\}$$

$$=-\frac{22(x^2+xy+3y^2)}{(x+6y)^3}$$

(d) $x^4-x^2+y^2=0$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$4x^3-2x+2yy'=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x(2x^2-1)}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=-\frac{1}{y^2}\left\{(6x^2-1)y-x(2x^2-1)y'\right\}$$

$$=-\frac{1}{y^3}\left\{(6x^2-1)y^2+x^2(2x^2-1)^2\right\}$$

//

さいご!!

13　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ のとき, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を求めよ.

$$z^2 = c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2\cdot 2x}{a^2} \qquad \therefore\ z_x = -\frac{c^2x}{a^2z} \quad //$$

$z_x = -\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z}$ より

$$z_{xx} = -\frac{c^2}{a^2}\,\frac{z - xz_x}{z^2}$$

$$= -\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{1}{z^2}\left(\frac{a^2z^2+c^2x^2}{a^2z}\right)$$

$$= -\frac{c^4}{a^2z^3}\underbrace{\left\{\frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}\right\}}_{1-\frac{y^2}{b^2}} \quad //$$

Maclaurin展開 (P74)

$$f(h,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(hD_x+kD_y)^n f(0,0)$$

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)x^2+f_{yy}(0,0)y^2\}$$

$$+\frac{1}{3!}\{f_{xxx}(0,0)x^3+3f_{xxy}(0,0)x^2y+3f_{xyy}(0,0)xy^2+f_{yyy}(0,0)y^3\}$$

$$+\cdots\cdots$$ となる.

計算ミスに注意!!